

放射光源の基礎

山本 樹 高エネルギー加速器研究機構・物質構造科学研究所 〒305-0801 茨城県つくば市大穂 1-1
E-mail: shigeru.yamamoto@kek.jp

1. はじめに

光速に近い速度で加速度運動する電子（または陽電子）が発する放射光（シンクロトロン放射）は、相対論的効果によって速度方向に鋭く集中することから、非常に指向性が高くかつ高い輝度を持つ。このような電子を光源として積極的に利用する研究はますます盛んに行われており、それが本学会の存立基盤でもある。本シリーズでは、放射光源に関する解説をなるべく平易に行うことを目的として、これまでは高品位の相対論的電子ビームを生成する道具としての加速器に関する解説を行ってきた。本稿をはじめとするいくつかの記事では、偏向電磁石・挿入光源（アンジュレータ・ウィグラ）等の放射光源の諸特性について述べることになる。

電子（陽電子）が発する放射の性質を調べるためには、電子の運動方程式（電子の場合）

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{\beta} \times \vec{H} - e\vec{E}, \quad (1)$$

$$\frac{dW}{dt} = -ec\vec{E} \cdot \vec{\beta}, \quad (2)$$

および、電磁場の Maxwell 方程式

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi, \quad (3)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad (4)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (5)$$

を連立させて考えることが必要になる。ここで、 \vec{p} , $\vec{\beta}$, W および e は、それぞれ電子の運動量、相対論的速度（ $=\vec{v}/c$; \vec{v} は電子の速度）、エネルギーおよび電荷であり、 c は真空中の光の速度である。また、 \vec{E} および \vec{H} は電場と磁場を表し、 \vec{A} と ϕ はそれぞれ電磁場のベクトルおよびスカラーポテンシャルを、 \vec{J} は電流密度を表している。

ここで、放射の特性を決める上で注目すべきなのは電子のエネルギー変化率を表す式(2)の存在である。加速器内の電子は集団（バンチ）で運動している。この集団運動のバラツキが極限まで小さくなり個々の電子がともに平行に運動していると見なせるような極限的状况では、電子の運

動（例えばアンジュレータ中の周期運動）とその結果生成される放射との相互作用がバンチ内電子に集団的に生じ、式(1)の右辺第2項を通して放射の波長のスケールでの電子の粗密を生成させる。この効果は、結果として発生される放射がさらに強い粗密をバンチに生ぜしめるという過程を通して、最終的にはレーザーによく似た位相のそろったコヒーレント放射の発振をもたらす。このような光源は、自由電子レーザーと呼ばれ次世代の放射光源としてその開発に強い期待が持たれている。

しかし、一方でいわゆる第三世代までの放射光源加速器では真空紫外より短波長領域の放射に対しては、この集団運動の際のバラツキは実効的に大きく電子が加速器内を平行に通過するという状況は成立しない。この場合、ある電子とそれ以外の電子による放射の相互作用は存在するが、バンチ全体では互いに打ち消しあい、電子の粗密を生ぜしめるには至らない。個々の電子は互いに独立に特定の位相関係を持たないインコヒーレントな放射を生成することになる。

次に上で述べた放射の特性と放射強度の関連について極一般的に考えてみよう。電子の集団からの放射 \vec{E}_R は、各電子からの放射の重ねあわせとして記述される。

$$\vec{E}_R = \sum_{i=1}^n \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t - \delta_i) \quad (6)$$

ここで E_0 は各電子の放射振幅であり δ_i は i 番目電子の位相、 k と ω は各々放射の波数および周波数である。強度は放射電場の2乗平均として与えられるが、結果は放射の特性がコヒーレントであるかインコヒーレントであるかによって大きく異なる。通常の放射光源（インコヒーレント光源）の場合、 $\alpha = kz - \omega t$ として、

$$\begin{aligned} |\vec{E}_R|^2 &= \left\{ \sum_{i=1}^n \vec{E}_0 \cos(\alpha - \delta_i) \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n \vec{E}_0 \cos(\alpha - \delta_j) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \vec{E}_0 \cos \delta_i \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n \vec{E}_0 \cos \delta_j \right\} \cos^2 \alpha \\ &\quad + \left\{ \sum_{i=1}^n \vec{E}_0 \sin \delta_i \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n \vec{E}_0 \sin \delta_j \right\} \sin^2 \alpha \\ &\quad + 2 \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_0^2 \cos \delta_i \sin \delta_j \right\} \cos \alpha \sin \alpha \quad (7) \end{aligned}$$

したがって、一周期当たりの平均では、第3項は消えて

$$\begin{aligned} \langle |\vec{E}_R|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^n E_0^2 \cos^2 \delta_i + \sum_{i \neq j}^n E_0^2 \cos \delta_i \cos \delta_j \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^n E_0^2 \sin^2 \delta_i + \sum_{i \neq j}^n E_0^2 \sin \delta_i \sin \delta_j \right\rangle \quad (8) \end{aligned}$$

δ_i および δ_j は乱雑であるとして平均すると、式(8)の中の中の第2項がゼロとなるので、

$$\langle |\vec{E}_R|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^n E_0^2 \right\rangle = n \frac{E_0^2}{2} \quad (9)$$

この結果は放射強度がバンチ内の電子の数または電流値に比例することを意味する。一方コヒーレントな放射に対しては全ての電子について δ_i が等しいので ($\delta_i=0$ として一般性を失わない)、

$$\begin{aligned} \langle |\vec{E}_R|^2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n E_0 \right)^2 \cos^2 \alpha \right\rangle = \left(\sum_{i=1}^n E_0 \right)^2 \langle \cos^2 \alpha \rangle \\ &= \frac{n^2 E_0^2}{2} \quad (10) \end{aligned}$$

となり放射強度は式(8)の n 倍になってバンチ内電子数または電流値の2乗に比例することがわかる。

挿入光源から得られるインコヒーレントな放射光および自由電子レーザーから得られるコヒーレント放射の特性については、本稿に続くそれぞれの専門家の解説(式(1)-(5)の数理的取り扱いを含めて)に待つことにして、ここでは相対論的状况下での電子からのインコヒーレントな放射(式(2)および式(1)右辺第2項を無視できる場合)の一般的性質を概観して、偏向電磁石からの円軌道放射の特性について述べることにする。

2. 放射光生成における相対論的效果

放射光の生成には、電子の運動に関する相対論的效果が非常に顕著に現れる。第一に注目すべきは時間圧縮の効果である。これは光の速さ c が有限であるために放射の発信時刻 t' と観測時刻 t との間に時間遅れが生じることが原因である (Fig. 1 参照)。

$$t = t' + \frac{R(t')}{c} \quad (11)$$

したがって放射発信時の時間間隔と観測時の時間間隔は次式によって関係付けられる。

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} = 1 - \beta \cos \theta \approx \frac{1}{2\gamma^2} (1 + \theta^2 \gamma^2) \quad (12)$$

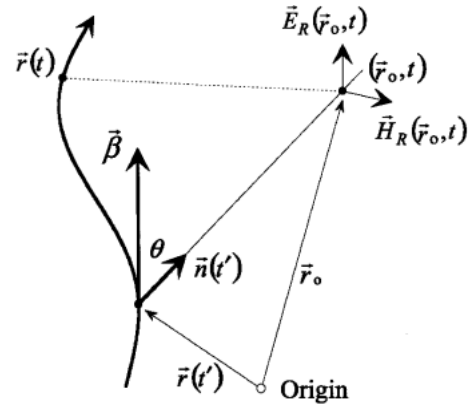


Figure 1. Radiation from a relativistic electron.

ここで、 $\vec{n}(t') = \vec{R}(t')/R(t')$ は観測ベクトル、 θ は \vec{n} と $\vec{\beta}$ がなす角であり、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ は Lorentz 因子である。このことから観測方向が電子の軌道の接線方向と一致した時には著しい時間圧縮 ($dt/dt' = 1/(2\gamma^2)$) が起こることがわかる。

同様に重要な、もう一つの効果は放射の空間的集中である。このことおよび相対論的電子からの放射の問題一般を考えるためには、放射の発信時刻 t' を独立変数とする Lienard-Wiechert のポテンシャル

$$\vec{A} = \frac{e\vec{\beta}(t')}{(1 - \vec{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t'))R(t')} \quad (13)$$

$$\phi = \frac{e}{(1 - \vec{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t'))R(t')} \quad (14)$$

を使うのが便利である。これらを Maxwell 方程式(3)に代入し、式(11)に注意して微分を行うと、電子の放射する電磁場として、

$$\vec{E}_R = e \left[\frac{\vec{n}(t') \times \{ (\vec{n}(t') - \vec{\beta}(t')) \times \dot{\vec{\beta}}(t') \}}{c(1 - \vec{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t'))^3 R(t')} \right] \quad (15)$$

$$\vec{H}_R = \vec{n}(t') \times \vec{E}_R \quad (16)$$

時空間の一点 (\vec{r}_0, t) にいる観測者が単位時間・単位面積当たり受けるエネルギーは、Poynting ベクトルを $\vec{S}(\vec{r}_0, t) = c\vec{E}_R(\vec{r}_0, t)^2 \vec{n}(t')/4\pi$ として、 $\Delta W = \vec{S}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{n}(t')$ で与えられるので発信時刻 t'_1 と t'_2 の間に電子に生じる加速度運動の結果として観測者が受けるエネルギーは

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{t=t'_1 + \frac{R(t'_1)}{c}}^{t=t'_2 + \frac{R(t'_2)}{c}} \vec{S}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{n}(t') dt \\ &= \int_{t'_1}^{t'_2} \vec{S}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{n}(t') \frac{dt}{dt'} dt' \quad (17) \end{aligned}$$

したがって、放射源から立体角 $d\Omega$ に放出されるパワーは

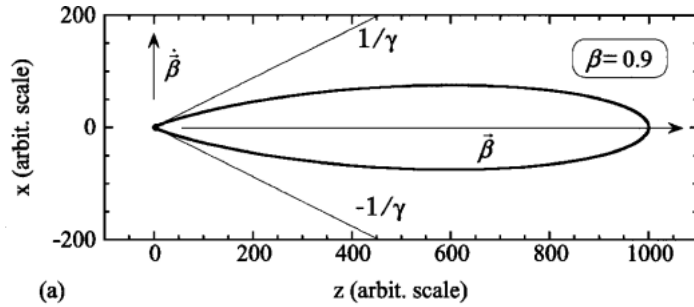


Figure 2. Spatial pattern of the radiated power from an electron in case of $\dot{\beta} \perp \beta$.

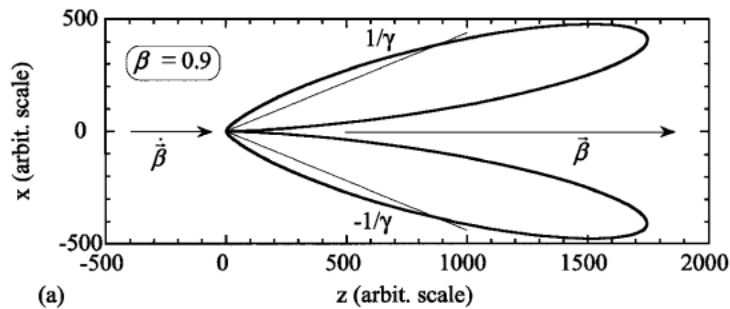


Figure 3. Spatial pattern of the radiated power from an electron in case of $\dot{\beta} // \beta$.

面積 $R^2 d\Omega$ を乗じて

$$dP(t') = \frac{dW}{dt'} R^2 d\Omega = \vec{S}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{n}(t') \frac{dt}{dt'} R^2 d\Omega \quad (18)$$

放射パワーの空間分布に関する一般的表式として次式を得る。

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \vec{S}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{n}(t') \frac{dt}{dt'} R^2 \approx \frac{e^2}{4\pi c} \frac{[\vec{n}(t') \times \{(\vec{n}(t') - \vec{\beta}(t')) \times \dot{\vec{\beta}}(t')\}]^2}{(1 - \vec{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t'))^5} \quad (19)$$

ここで、電子の加速度 $\dot{\vec{\beta}}$ が速度 $\vec{\beta}$ に (1) 垂直な場合と (2) 平行な場合について結果を書き下すと、
垂直な場合：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \left(\frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c}\right) \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (20)$$

平行な場合：

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \left(\frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c}\right) \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (21)$$

上記の結果を $\beta = 0.9$ について図示したのが **Fig. 2** および

Fig. 3 である。電子の速さが光速に近づくにつれ、放射の角分布が前方に鋭く集中し強度も著しく増加することが見て取れる。このことは式 (19) の分母が $\beta \approx 1$ かつ $\theta \ll 1$ の場合にゼロに近づくことによる。ここで $(1 - \beta \cos \theta)^{-1}$ が二分の一になる θ を θ_{SR} とすれば

$$\theta_{SR} = \sqrt{2 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)} \approx \frac{1}{\gamma} \quad (22)$$

となり、放射パワーの大半はこの角度 ($1/\gamma$) の中に投入されることになる。

3. 円軌道放射

一様な磁場中で相対論的電子が Lorentz 力を受けて円運動を行う際に発する放射は、元来 Synchrotron 放射 (放射光) と呼ばれる軌道面に鋭く集中した高い輝度と指向性を持つ。ここでは、通常の放射光源としての電子リングから生じる円軌道放射について概観する。

一般に、無限の過去から無限の未来の間に一個の電子が加速度運動を行う際に放出するエネルギー I の (周波数) スペクトルは¹⁾,

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{4\pi^2} \vec{F}(\omega) \vec{F}(\omega)^* \quad (23)$$

ここで、 $\vec{F}(\omega)$ は “電場 ($\vec{f} = R(t') \vec{E}_R(t')$)” の Fourier 変

換として与えられる。

$$\vec{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (24)$$

観測点が電子から十分に離れた遠方場では、運動による電子の変位が無視でき観測者から見た電子の方向を示す観測ベクトル \vec{n} はほぼ一定と近似することができる。

$$R(t') \approx r_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}(t') \quad (25)$$

この時、上記の Fourier 変換は次のように簡略化される。

$$\begin{aligned} \vec{F}(\omega) &= \frac{e\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}(t')) \\ &\times \exp \left\{ -i\omega \left(t' - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}(t')}{c} \right) \right\} dt' \end{aligned} \quad (26)$$

このように準備をした上で、円軌道上を運動する電子からの放射スペクトルを求めるために、動径ベクトルと速度ベクトルを t' について書き下す ($t'=0$ における電子の位置を原点として)。

$$\vec{r}(t') = \left(\rho \left\{ 1 - \cos \left(\frac{\beta c t'}{\rho} \right) \right\}, 0, \rho \sin \left(\frac{\beta c t'}{\rho} \right) \right) \quad (27)$$

$$\vec{\beta}(t') = \left(\beta \sin \left(\frac{\beta c t'}{\rho} \right), 0, \beta \cos \left(\frac{\beta c t'}{\rho} \right) \right) \quad (28)$$

ここで、 ρ は軌道半径であり、実用的単位を使うと (偏向電磁石の磁束密度を B (T)、電子ビームのエネルギーを E_B (GeV) として) $\rho(\text{m}) = 3.333 E_B(\text{GeV}) / B(\text{T})$ 。これらを上記の一般論に適用して Fourier 変換を実行すると偏向電磁石からの放射エネルギースペクトルを得ることができる。

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{3e^2 \gamma^2}{4\pi^2 c} [F_{\parallel} F_{\parallel}^* + F_{\perp} F_{\perp}^*] \quad (29)$$

$$F_{\parallel} = \frac{\omega}{\omega_c} (1 + \gamma^2 \Psi^2) K_{2/3}(\eta) \propto E_{\parallel} \quad (30)$$

$$F_{\perp} = i \frac{\gamma \Psi \omega}{\omega_c} \sqrt{1 + \gamma^2 \Psi^2} K_{1/3}(\eta) \propto E_{\perp} \quad (31)$$

$$\eta = \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2 \Psi^2)^{3/2} \quad (32)$$

ここで、 Ψ は軌道面から観測点を見上げるまたは見下ろす角度であり、 E_{\parallel} および E_{\perp} は電場の σ - および π - 偏光成分を表す。また、 $K_{1/3}$ と $K_{2/3}$ は各々 $1/3$ 次と $2/3$ 次の変形 Bessel 関数であり、 ω_c は臨界周波数 (周波数空間で放射エネルギーを二分する点として定義される) である。

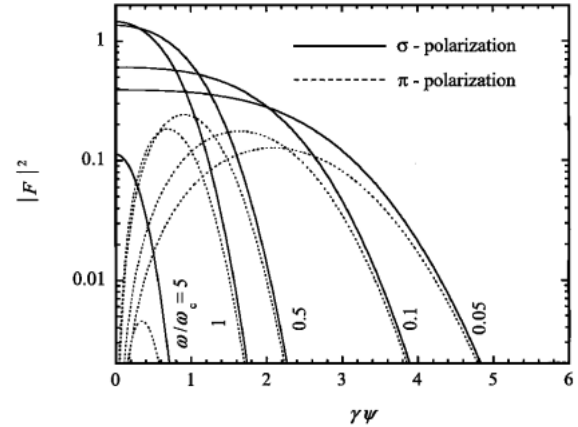


Figure 4. Observation angle ($\gamma\Psi$) dependence of σ - and π - polarization components of the bending radiation.

$$\omega_c = \frac{3\gamma^3 c}{2\rho} \quad (33)$$

式(30)と(31)より放射電場 $E_{\parallel}(F_{\parallel})$ と $E_{\perp}(F_{\perp})$ の間の位相差は $\pi/2$ である。このことは、円軌道放射は一般に楕円偏光 (角度 Ψ からの観測に対して) であることを示している。両偏光成分の観測角度依存性を Fig. 4 に示した。

電子の円軌道のうち遠方からの観測にかかるのは、軌道面内接線方向のおよそ $\pm 1/\gamma$ の角度範囲のもののみであり、この部分の円弧のみが式(26)の積分に寄与する。式(29)は、この円弧部分を電子が一回通過する際に放出するエネルギー角分布の周波数スペクトルを示している。実際の電子リング内では毎秒 $I_B(\text{A})/e$ 個の電子がこのような運動を行っていることを考慮すると、式(29)は (両辺を $\hbar\omega$ で割ることによって) 放出される光子数角分布の周波数スペクトルとして次のように書き直すことができる (自然光束密度)。

$$\frac{d^3 N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega) dt d\Omega} = \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \frac{1}{\hbar} \frac{I_B}{e} \quad (34)$$

ただし、単位は photons/s/rad²/100% bandwidth である。

式(34)を用いて描いた円軌道放射のスペクトルを Fig. 5 に示す。ここで、 $I_B = 500 \text{ mA}$, $E_B = 1, 2.5$ および 6.5 GeV とした ($\Psi=0$)。

次に円軌道放射の time domain の構造を調べることにしよう。このために、観測にかかる円弧を1電子が通過する時に発する電場を式(15)を用いて直接求めた (Fig. 6)。この図の重要な点は、電場波形が観測時間軸の方向に著しく圧縮され歪むことである。上述のように、その程度は $\gamma=4892$ ($E_B=2.5 \text{ GeV}$) の時 $dt/dt' = 1/(2\gamma^2) = 2 \times 10^{-8}$ であり、電場パルスの半値幅の比に良く現れている (Fig. 6 より $\Delta t' \approx 0.5 \times 10^{-11} \text{ s}$ に対して $\Delta t \approx 1 \times 10^{-19} \text{ s}$)。また、この電場パルスを Fourier 変換したものが

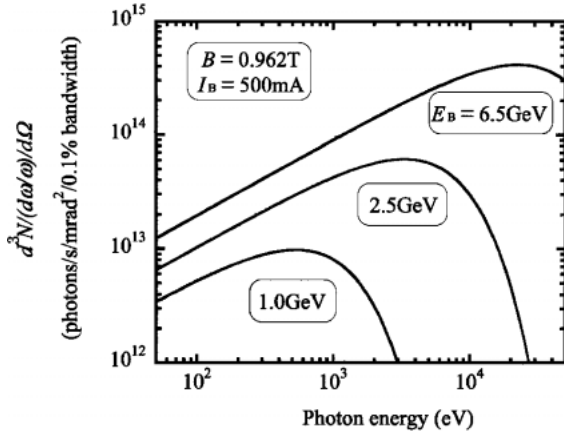


Figure 5. Natural photon flux density of the radiation from the bending magnet in case of $I_B = 500$ mA, $E_B = 1, 2.5$ and 6.5 GeV.

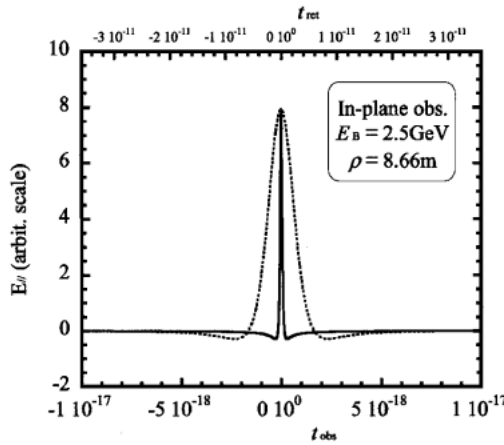


Figure 6. A wave form of the bending radiation (in-plane observation). The wave form as a function of the observation time t is denoted by a solid curve, and that as a function of the retarded time t' is denoted by a broken curve.

Fig. 5 のスペクトルになる。この事情は、パルス幅の逆数として与えられるスペクトルの代表的周波数 $\omega_{SR} \approx 1/\Delta t = 1 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}$ が、式(33)から得られる臨界周波数 $\omega_c \approx 6 \times 10^{18} \text{ s}^{-1}$ とほぼ一致するところにも矛盾なく現れている。

4. 放射強度について

前節までは放射光発生原理を見るために電子一個の放射または複数の電子が同一軌道上を運動する場合の放射の性質を調べた。しかし、加速器内では電子は集団で運動しており、実際には有限のビームサイズおよび角度発散をもつ。一般に、ビームサイズは実空間における電子の位置分布の標準偏差 (σ_x, σ_y) 、角度発散は角度空間における電子の角度分布の標準偏差 $(\sigma_{x'}, \sigma_{y'})$ として定義される(理想的な電子リングでは、電子の分布は放射減衰と放射励起の過程を通してガウス型になる)。 x および y は実空間における水平および鉛直方向である。ビームサイズと角度発散

は電子リング内の場所に依存する量であるが、それらの積は次の関係によってエミッタンス $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ と呼ばれる重要な物理量(電子リング内の場所に依存しない不変量)と結び付けられている²⁾。厳密には、エミッタンスとは位相空間における楕円の面積と関係する量であるが、ある特定の場所ではビームサイズと角度発散の積と一致する。

$$\varepsilon_{x,y} = \sigma_{x,y} \sigma_{x',y'} \quad (35)$$

以下に見るように、放射の性質、特に放射強度はこれらに大きく依存している。電子ビームエミッタンスをできる限り小さくして、極小のビームサイズとビームの平行性を追求することによって放射の高輝度化を目指すのが第三世代放射光源の基本的考え方である。

放射光科学の分野では、光束(photon flux, \mathcal{F})、光束密度(photon flux density, \mathcal{Q})、ブリリアンス(brilliance, \mathcal{B})の三つが放射の強度を示す物理量として用いられる。光束は全方位に放射される光子数の総和として次のように定義される。

$$\mathcal{F} = \frac{d^2 N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega) dt} = \int \frac{d^3 N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega) dt d\Omega} d\Omega \quad (36)$$

放射の角分布はガウス型であるので上式を次のように近似することができる。挿入光源のような線状の光源については、

$$\mathcal{F} \approx 2\pi\sigma_p^2 \left. \frac{d^3 N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega) dt d\Omega} \right|_{\theta=0} \quad (37a)$$

面状光源である円軌道放射については、取り込み角を $\Delta\Theta$ として

$$\mathcal{F} \approx \Delta\Theta \sqrt{2\pi}\sigma_p \left. \frac{d^3 N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega) dt d\Omega} \right|_{\theta=0} \quad (37b)$$

ここで、 Θ は軌道面内接線方向からの隔たりを表す角変数、また、 σ_p は光子固有の角度広がりである。電子ビームが、角度広がりをもつ場合、式(34)に示した自然光束密度は次の実効的光速密度に置き換えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \left[\frac{d^3 N_{\text{photon}}(\Theta^*, \Psi^*)}{(d\omega/\omega) dt d\Omega} \right]_{\text{eff}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta \int_{-\infty}^{\infty} d\Psi h(\Theta, \Psi) \frac{d^3 N_{\text{photon}}(\Theta - \Theta, \Psi - \Psi^*)}{(d\omega/\omega) dt d\Omega} \end{aligned} \quad (38)$$

ここで、 $h(\Theta, \Psi)$ は電子の分布を表す確率密度関数である。また (Θ^*, Ψ^*) は観測方向である。

$$h(\Theta, \Psi) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{\Theta^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\Psi^2}{2\sigma_y^2}\right\} \quad (39)$$

この一見複雑な式の意味は、電子の存在する角度空間における光束の角密度を求めることであり、より直感的な次の式で近似することができる（挿入光源：軸上）。

$$\mathcal{D}_{0, \text{eff}} \approx \frac{\mathcal{F}}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y} = \frac{\sigma_p^2}{\Sigma_x\Sigma_y} \frac{d^3N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega)dtd\Omega} \Big|_{\theta=0} \quad (40a)$$

円軌道放射については軌道面内で一様であることを考慮して（面内放射について）、

$$\mathcal{D}_{0, \text{eff}} \approx \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{2\pi}\Sigma_y\Delta\Theta} = \frac{\sigma_p'}{\Sigma} \frac{d^3N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega)dtd\Omega} \Big|_{\theta=0} \quad (40b)$$

ここで、 Σ_x と Σ_y は角度空間における実効的光源サイズである。

$$\Sigma_{x,y} = \sqrt{\sigma_{x,y}^2 + \sigma_p^2} \quad (41)$$

さらに、電子ビームの実空間における広がり considering プリルアンス、 \mathcal{B} を定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \frac{\mathcal{D}}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y} = \frac{\mathcal{F}}{4\pi^2\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_x\Sigma_y} \\ &= \frac{1}{4\pi^2\Sigma_x\Sigma_y\Sigma_x\Sigma_y} \frac{d^2N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega)dt} \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、 Σ_x と Σ_y は実空間における実効的光源サイズであり、光子固有の空間広がり σ_p を用いて

$$\Sigma_{x,y} = \sqrt{\sigma_{x,y}^2 + \sigma_p^2} \quad (43)$$

光束密度と同じく近似的には

$$\mathcal{B}_0 = \frac{\mathcal{D}_0}{2\pi\Sigma_x\Sigma_y} \quad (44)$$

上式に見るように \mathcal{B} は、実用的には、光源の単位面積当たり、単位立体角当たり、単位時間当たり、単位相対バンド幅あたりに放出される光子数として定義される。第三代光源の性能はこの量を測度として表記することによって、よく特徴付けられる。しかし、より力学的に、光源の4次元位相空間（横方向 (x, x', y, y') -空間）における光束密度、または6次元位相空間（上記に縦方向 (t, ω) -空間を加えた）における光子密度と考えるほうが一般的な光源の議論においては理解しやすい。

上の議論において光源の実効サイズを求めるには光子の実空間および角度空間における固有広がりを知らなければならない。最後に、円軌道放射の場合についてこのことに基づいて本稿を閉じることにする。

円軌道放射は軌道面内では一様なので鉛直面内の分布のみを考える。この分布をガウス型と仮定すると、式(34)を鉛直方向に積分して、次の等式を得る。

$$\sqrt{2\pi}\sigma_{p'} \frac{d^3N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega)dtd\Omega} \Big|_{\psi=0} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\Psi \frac{d^3N_{\text{photon}}}{(d\omega/\omega)dtd\Omega} \quad (45)$$

次のような $\sigma_{p'}$ に対する漸近解を得る³⁾。

$$\sigma_{p'} \approx \frac{1.07}{\gamma} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-1/3}; \quad \omega \ll \omega_c \quad (46)$$

$$\sigma_{p'} \approx \frac{0.58}{\gamma} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-1/2}; \quad \omega \gg \omega_c \quad (47)$$

実空間における固有広がり、回折限界に対する次の条件より求めることができる。

$$\sigma_p\sigma_{p'} = \varepsilon_p = \frac{\lambda}{4\pi} \quad (48)$$

ここで ε_p は光子のエミッタンスである。

参考文献

- 1) J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, Wiley (1965).
- 2) H. Wiedemann: *Particle Accelerator Physics*, Springer-Verlag (1993).
- 3) K-J. Kim: American Institute of Physics Conf. Proc. **184**, 565 (1989).