

◁放射光源シリーズ(4)▷

ビーム光学入門

原田健太郎*, 宮島 司 (高エネルギー加速器研究機構 物質構造科学研究所*)

放射光ユーザーを対象に光源加速器の基礎について平易に解説を行うというこのシリーズだが、4回目となる今回は「ビーム光学入門」である。光源加速器では半径数 cm の真空ダクトの中を光速の電子が回っている。1日3回入射で運転が行われているとすれば蓄積時間は8時間であり、電子は地球から冥王星までの距離の1.5倍を走ることになる。加速器の中でこれほど電子を安定に走らせておくにはどうすればよいのか？ その答えを与えるのが加速器中の粒子の運動理論、すなわちビーム光学である。

前半ではビーム光学の理論について述べ、後半ではビーム光学によって決まる主な3つのパラメータ、すなわちビームサイズ、入射効率、ビーム寿命について述べる。

1. 集束力と閉軌道のずれ

まずはダクトの中にビームを閉じこめておく為に必要な集束力について述べる。次に磁場誤差やエネルギーのずれに対する軌道の変化について触れ、集束力のおかげでそれらに対する安定性も確保されることを述べる。

昔の加速器は偏向磁石によって電子を曲げ、閉じた軌道を作っただけのものであった。加速器に入射される現実の粒子には必ず軌道から外れていく方向の初期運動量が少しはあるので、ほんの短い距離、すなわち上下の磁極に当たるまでしか粒子を走らせることはできなかった。例えば、半円状の磁石を2つ並べてその中心から粒子を入射し、渦巻き状に何周かさせてすぐに粒子を取り出すというサイクロトロンは最初期の加速器であるが、磁場は均一であり、偶然にも磁場誤差(漏れ磁場)によって弱い集束力が得られていたにせよ、ビームを安定に加速させることは難しかった。もっと長い距離、安定に粒子を走らせるにはどうしたらよいのか？ 最初の集束力は偏向磁石の磁極を少し傾けることによって得られた。外側にいる粒子を内側に蹴り戻す線形(位置の1次)の力を、集束力という。集束力によって初めて、粒子を非常に長い間加速器の中に閉じこめておくことができるようになったのである。

現代の一般的な加速器においては集束力を得るのに4極磁石が用いられている(Fig. 1参照)。偏向磁石の磁極を少し傾けた場合は水平垂直両方向に対して同時に集束することができるが、4極磁石の場合、水平方向に対して集束(Focusing)であれば垂直方向に対しては発散(Defocusing)になっている(その場合をFocusingの4

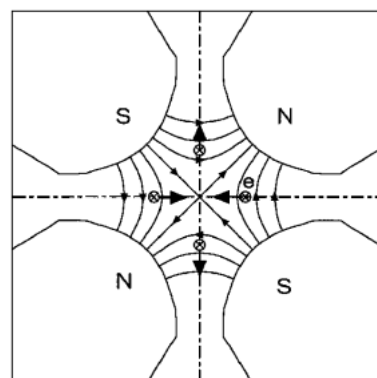


Figure 1. Quadrupole Field
This shows the magnetic field pattern of a focusing quadrupole magnet. The off-axis particle is kicked inward in the horizontal plane and outward in the vertical plane.

極と呼ぶ)。従って、垂直方向にも粒子を閉じこめておくためには、集束と発散の4極磁石を交互に並べる必要がある(強集束の原理¹)。その様なラティス(磁石の並び)をFODOといい、PFもPF-ARも基本ラティスはFODO構造となっている(ここで、Oは偏向磁石や空きスペースを表す)。光学で言えば、集束は凸レンズ、発散は凹レンズに対応しており、FODOセルにおいては水平垂直の両方向とも凹レンズと凸レンズが交互に並んだ形になっているのである(Fig. 2参照)。

加速器中の粒子の振動は色々であるが、軌道上のそれぞれの場所ととにかく一番外側にいる粒子の場所を繋いで作った包絡線をベータatron関数(β で表す²)と言う。また、個々の粒子がベータatron関数で表される帯(筒と言うべきか)の中で行う振動をベータatron振動と呼ぶ。ベータatron関数を用いたビームの記述は、幾何光学において光の帯がレンズによって幅を変えながら進んでいく様なイメージと数学的に等価であり、それがビーム光学という言葉の所以でもある。

ところで、現実の磁石の位置や磁場の強さには誤差があ

¹ 集束と発散を交互に用いて効果的に集束を行うことを言う。偏向磁石の磁極の傾きを大きくすると、4極磁石と同じく水平集束なら垂直発散という性質を持つようになる。集束力はその様な偏向磁石から得られるものであってもよい。

² 数学における β 関数とは全く異なるものである。

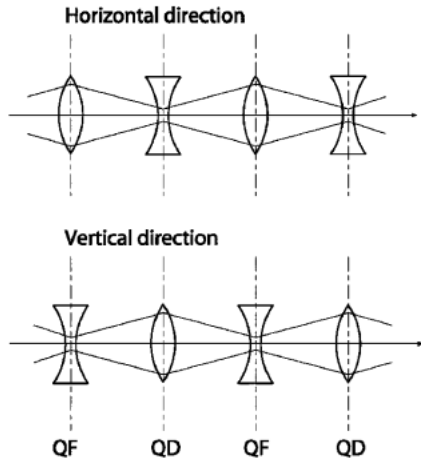


Figure 2. FODO Lattice
FODO-lattice (QF: focusing quadrupole, QD: defocusing quadrupole).

る。その誤差によって生じる閉軌道の歪みを、COD (closed orbit distortion) という。ここでは、雨樋のようなものとパチンコ玉を使って説明を試みる³。線形集束力は2次のポテンシャルなので、断面が放物線型の雨樋を水平に置くことを思い浮かべ、単なるダクトは粒子に力を及ぼさないので平らな場所とする。その並びにパチンコ玉を通してみよう (この際、つなぎ目とか円形に閉じるための曲げは忘れて)。雨樋が誤差無く並んでいれば玉はまっすぐに中心を通り抜けるが、誤差によって雨樋の位置が中心からずれていると、軌道も微妙にずれてしまう。だが、誤差がそれほど大きくなければ、本来のまっすぐな軌道の近くを振動しながらパチンコ玉は安定にまわるであろう (Fig. 3 参照)。すなわち、磁石に誤差があったとしても、設計軌道の近くのどこかに新たな閉軌道 (COD) が存在し、粒子はその周りをベータatron振動するのである。なお、現実の加速器においては COD を小さくする (粒子の軌道を本来の軌道に近づける) 為に補正磁石という小さな偏向磁石が用いられている。

次に粒子のエネルギーのずれを考えよう。加速器の中の電子は光速であり、エネルギーの違いは質量の違いとなる。偏向磁石中で受ける力は同じでも、重い粒子は曲げられにくく軽い粒子は曲げられやすいのでエネルギーに応じた軌道のずれが生じてしまう。しかし集束力のおかげで少々軌道のずれに対しては粒子の振動は安定に保たれ、閉軌道の場所が変化するのみである。普通は重い粒子は設計軌道よりも外側をまわり、軽い粒子は内側をまわる。粒子のエネルギーに応じたその様な閉軌道のずれを分散関数と言う。すなわち、エネルギーがずれた粒子は分散関数 (か

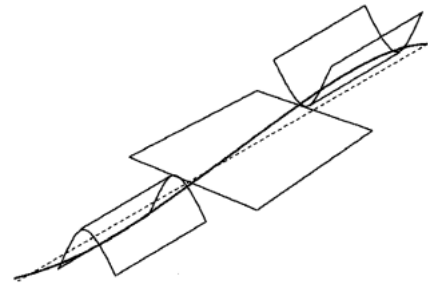


Figure 3. Illustration of COD
The dotted line shows the central orbit. The flat surface represents the duct without any potential and the curved surface the focusing and defocusing magnets with quadratic potential. If the center of the focusing and defocusing potential is deviated, the central closed orbit is distorted like solid curve and this is called COD (closed orbit distortion).

けるエネルギーのずれ) という中心軌道の周りをベータatron振動するのである。

2. ベータatron振動の安定性

ダクトの中を単に安定にまわすだけであれば4極磁石の集束力だけで十分であり、磁場誤差やエネルギーのずれが存在した場合の安定性も同時に確保される。しかし、強い集束力によってビームサイズを小さく抑えようとした場合、ベータatron振動の安定性を確保することはそう簡単ではなくなる。ここでは、集束力が強い場合のベータatron振動がどうして不安定になるかについて述べる。

ベータatron振動を不安定にする原因は共鳴現象である。共鳴とは、粒子が加速器内のある部分を通る度に力を受け、それが常に粒子の振動の振幅を増大させる方向に働くという現象である。振幅が爆発的に大きくなった粒子は、最終的に真空ダクトの壁に当たって失われてしまう。リング一周のベータatron振動数が整数 (1次の共鳴) や半整数 (2次) などになった場合に共鳴が起き、一般に3次共鳴 (6極磁石によって励起される) 程度までが粒子を失わせる強い共鳴となる。例えば振動数が整数の場合、粒子は每周同じ場所を通過して同じ力を受ける。非常に小さな磁場の誤差や非線形成分でも、何度も粒子を蹴ることで爆発的に振幅を増大させてしまい、最終的に粒子が失われるのである。中心軌道を通る蓄積ビームの振動数は勿論共鳴でない場所に設定するが、エネルギーがずれている場合や振動が大振幅の場合には振動数がずれてしまう。ずれの大きさがあるところまで来ると共鳴に当たってしまうが、集束力が強い場合、エネルギーのずれや振幅の増大に伴う振動数のずれが飛躍的に大きくなるのである。共鳴に当たるまでの振幅の安定領域をダイナミックアパーチャ (エネルギーに対してはエネルギーアクセプタンス) というが、如何にして広いダイナミックアパーチャを確保するかがビーム光学担当者 (通称、軌道屋) の腕の見せ所である。

ちなみに4極磁石の集束力は粒子のエネルギー (すな

³ 数学的には偏向磁石も4極磁石も線形の集束力であり、偏向磁石の磁場の誤差と4極磁石の位置の誤差はともにポテンシャルの中心軸のずれとして記述できるので、この描像はある程度正しい。

わち質量)に依るので、重い粒子の振動数は小さく、軽い粒子の振動数は大きくなる。このエネルギーによる集束力の違い(色収差)を補正しない場合、エネルギーのずれが1%に満たない内に整数共鳴にぶつかることとなる。そこで6極磁石を用いて色収差の補正を行うのである。6極磁石のポテンシャルは3次曲線であり、リングの外側では正で内側では負⁴となる。従って、6極磁石による力は、外側をまわる重い粒子に対しては集束、内側をまわる軽い粒子に対しては発散となり、4極磁石の集束力の過不足を補正してやることのできるのである。

なお、ビーム光学は粒子の進行方向(縦方向という)に対して垂直な方向(横方向という)を扱うが、ビームの進行方向に対してはRF空洞によって集束力が与えられる。分散関数の効果により、エネルギーの高い粒子は外側をまわり、エネルギーの低い粒子は内側をまわる。粒子は光速であるので、軌道長の差はRF空洞への到達時間の差となる。電場の大きさが時間的にだんだん減っていく位相で加速を行えば、早く来た粒子(内側をまわって来た粒子)に対しては設計粒子よりも多く加速を行い、遅く来た粒子(外側を回って来た粒子)に対しては少なくできる。すなわち、RFはエネルギーをそろえる方向の集束力を持つのである(位相安定性の原理)。

3. 放射減衰と放射励起

粒子の運動を安定に保つのは集束力だけではない。例えば、入射粒子は中心軌道からずれた場所に打ち込まれるので大振幅で振動を始めるが、0.1秒も経たない内にすぐに振幅が小さくなって中心軌道上を回るようになる。これは加速器中の粒子⁵の振動に対する強力な減衰力のおかげである。ただし、振動を励起するメカニズムも存在するので、どんなに待ってもビームは線や点にはならない。次に、ビームサイズを決めるメカニズムでもある放射減衰と放射励起について述べる。

放射励起、放射減衰とも、その名の通り粒子が曲げられて光を出す⁶ことに起因している。粒子が光を出すとエネルギーを失うので、それをRF空洞で補ってやる必要がある。光は粒子自身の進行方向に向けて出されるので、粒子が中心軌道からずれた向きを向いていれば、そのずれた向きの運動量を必ず少し含む。ところが、RF空洞による加速は常に中心軌道に平行な方向である(Fig. 4参照)。従って、光を出してエネルギーを失ってそれをRFで補う過程を繰り返していれば、中心軌道からずれた方向の運動量がどんどん減って正しい方向の運動量だけになっていくのである。これが放射減衰のメカニズムである。次に放射励

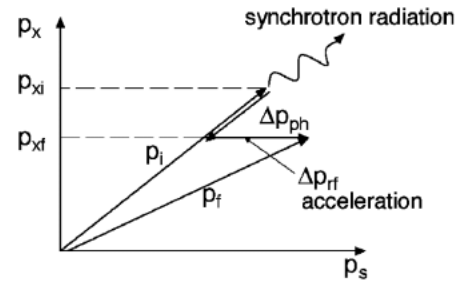


Figure 4. Radiation Damping
Schematic illustration of the radiation damping. P_s is the longitudinal momentum and P_x the transverse one. Because the photon is emitted in the forward direction of the particle, the total momentum of the particle is reduced to $p_i - \Delta p_{ph}$ where Δp_{ph} includes a certain fraction of the transverse momentum of the particle. By the acceleration at the RF cavity, the longitudinal momentum is increased by Δp_{rf} that does not include the transverse component. Therefore, after this process, the fraction of the transverse component in the total momentum of the particle is reduced and the angular divergence of the beam becomes small.

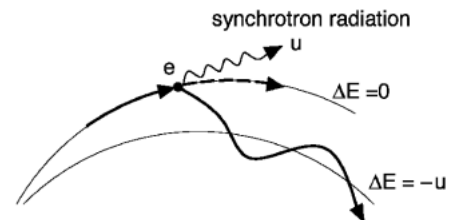


Figure 5. Radiation Excitation
The radiation excitation of the betatron motion arises from the synchrotron radiation at a location with nonzero dispersion functions. “ $\Delta E = 0$ ” shows the central orbit of on-momentum particles and “ $\Delta E = -u$ ” that of off-momentum particles. (The amplitude of the off-momentum orbit is the dispersion function times $\Delta E/E_0$.) Because of this difference of the central orbit, after on-momentum particle emits photon, it begins to oscillate along the off-momentum orbit.

起であるが、曲げられて粒子が光を出す時、偏向磁石の中で連続的にすべての粒子が等しくエネルギーを失うわけではない。量子力学的なミクロな視点で見れば、個々の粒子がまちまちな場所でまちまちなエネルギーの光子を放出しているのである。従って、光を出した後の粒子の集団はエネルギーが不揃いになっており、量子力学からこの統計的な広がりをなくすことは不可能である。粒子のエネルギーが変わると分散関数の効果で中心軌道がずれる為に、偏向磁石を通るたびに個々の粒子がまちまちに振動を始めるのである(Fig. 5参照)。これが放射励起である。メカニズムから言って、ずれが大きければ減衰は大きく、励起の方はずれの大きさに無関係である。従って、放射減衰と励起のバランスで決まるある平衡状態のずれの大きさというものが存在し、それをエミッタンス ϵ という。ちなみに、ビームの進行方向(エネルギーのずれの方向)に対しても同じ話が成立し、平衡状態での広がりをエネルギー広がり σ_E という。

⁴ 集束の6極磁石の場合。実際には逆のポテンシャル(発散)の6極磁石も用いて、水平垂直両方向に対して補正を行う。

⁵ 電子と陽電子のみ。陽子など重い粒子について減衰は期待できない。

⁶ 重い粒子は光を出さないで減衰が期待できないのである。

水平方向のビームの広がりには偏向磁石の中でエネルギーがばらついた粒子が振動を始めることが原因である為、その振幅を小さく抑える為には偏向磁石の中で分散関数を小さく抑えればよい。すなわち、低エミッタンスの加速器では、強い集束力によって分散関数を小さくしているのである。また、粒子を垂直(上下)方向に曲げる偏向磁石や挿入光源などがなければ、垂直方向には分散関数が存在しないので理論上はビームが全く広がらないことになる。ただし現実には、誤差磁場や水平垂直振動の結合によって垂直方向のエミッタンスが生じ、一般に水平方向のエミッタンスの1%から10%程度の値となる。

以上が軌道理論の概略である。ここからは具体的な話、ビームサイズ、入射効率、ビーム寿命について、それらがどのようにして決まるのか話したい。

4. ビームサイズ

加速器中の電子のビームサイズは放射励起と放射減衰のバランスで決まる。その大きさはエミッタンス ε と振動の包絡線であるベータatron関数 β で書ける。また、エネルギー広がり σ_E も常に存在するので、分散関数 η の存在する場所では粒子のエネルギーによって軌道が変わる効果でビームサイズが広がる。結局ビームサイズは

$$\sigma = \sqrt{\varepsilon\beta + \eta^2\sigma_E^2}$$

となる。なお、分散関数は偏向磁石と4極磁石をうまく並べれば、ある領域で消すことが可能である。例えば、偏向磁石を2台並べて、中央に4極磁石を置いてやる。粒子のエネルギーのずれに伴う偏向磁石の曲げの過不足を、中央の4極でうまく補うようにすれば、そのセクションの出入り口で軌道をそろえることができる(Fig. 6参照)。その様な領域を無収差(アクロマート)といい、挿入光源は分散関数のない場所に挿入されるのが一般的である。例えば $\varepsilon=1$ nmrad, $\beta=10$ m, $\eta=10$ cm, $\sigma_E=0.001$ とすれば、ビームサイズは0.14 mm, 分散関数がなければ0.1 mmである。

5. 入射効率

入射の際、ビームは中心軌道から離れた位置に打ち込まれる。入射ビームは大振幅で振動を始めるが、放射減衰の効果があるので振動は小さくなり、やがて蓄積ビームと一緒にまわらようになる。重要なことは、入射ビームの初期振幅を小さくすること、大振幅のビームを安定に蓄積することである。放射減衰する前に振動が不安定になってしまったら、ビームを蓄積することが不可能になってしまう。

入射ビームの初期振幅は、入射点における蓄積ビームと入射ビームの位置関係、及び粒子の振動の包絡線であるベータatron関数 β (とその微分)によって決まる。ある

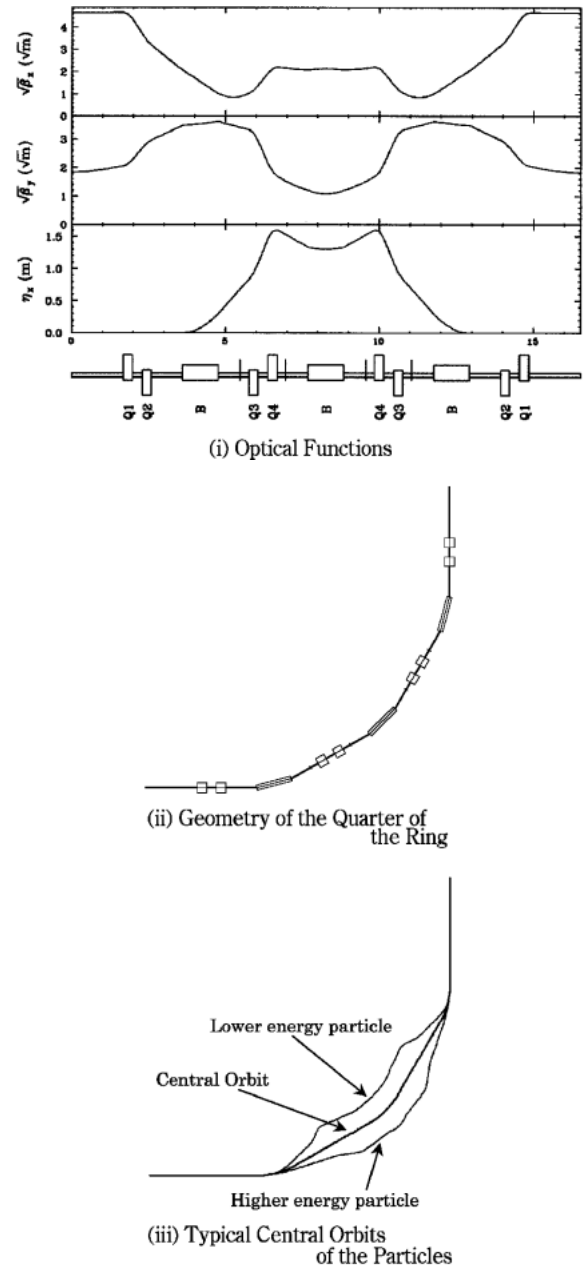


Figure 6. Example of the Achromatic Normal Cell (i) shows the optical functions of the quarter of the ring of NSLS at HFEI, China, (ii) is the geometry of the lattice and (iii) the typical central orbit of on-momentum and off-momentum particles (magnified). Since the achromatic section includes three bending magnets, this lattice is called TBA (Triple Bend Achromat).

粒子に注目した場合、その粒子の振幅は β が大きな場所では大きくなり、 β が小さな場所では小さくなる。従って、入射点で β の値が大きければ、入射ビームの振幅はリングの他の部分では相対的に小さくなる。入射ビームのリング1周を通じての平均の振幅を小さく抑えるには、入射ビームと蓄積ビームをできるだけ近づけ、かつその場所での β を大きくすればよいのである。ただし、蓄積ビームを入射ビームに近づけるのがキッカー電磁石、入射

ビームと蓄積ビームの間に存在して入射ビームの向きを蓄積ビームと平行にするのがセプタム電磁石の役割である。ただし、蓄積ビームをあまり入射ビームに近づけると、セプタムに蓄積ビームが当たってなくなってしまい、 β を大きくしすぎると、1周して戻ってきた入射ビームがセプタムの内側に当たってしまうことになる。ビーム光学に従って適当な入射パラメータが決定される。

いずれにしても入射ビームの振幅は大きく（一般に数cm）、それを安定に保つには広いダイナミックアパーチャが必要である。ダイナミックアパーチャが広ければ入射粒子のほとんど全てを蓄積することも可能であるが、逆の場合、入射ビームのほとんどは失われてしまい、電流を貯める為に長い時間がかかることとなる。

6. ビーム寿命

最後にビームの寿命について述べる。粒子の振動が天体間を走破するほど安定なのに、どうして蓄積していると電流が減っていくのか？ 様々な現象が関わる難問であるが、粒子を失わせる原因は主に散乱と共鳴振動である。散乱には、まわっている電子同士の散乱や真空中に漂っている残留ガスによる散乱、電子が光を出した際の反跳があるが、1回の散乱でダクトの壁に当たってなくなる場合と、散乱されたことによって振動の振幅やエネルギーのずれが大きくなり、その瞬間の振幅ではダクトに当たらないが、共鳴が励起されて放射減衰する前に爆発的に振幅が大きくなり、最終的にダクトの壁に当たって粒子がなくなる場合とがある。ダクトの中で粒子がまわる領域を口径と呼ぶが、真空ダクトの壁のように物理的に制限される口径をフィジカルアパーチャ（物理的口径）、共鳴振動の様な力学的な運動を介して制限される口径をダイナミックアパーチャ（力学的口径）という。

物理口径を広くとっても、力学口径が広くなければ意味がない。例えば、低エネルギーの放射光源のビーム寿命を決める最大の要因はタウシェック散乱であるが、それは水平方向にベータatron振動している粒子同士がぶつかり、縦方向に散乱され、RFで集束しきれないほど大きくエネルギーがずれてしまうという現象である。RFの安定領域（bucket height：物理口径）から外れた粒子はエネルギーのずれがどんどん増大していき、最終的には分散関数の大きな場所でダクトの壁に当たって失われるのである。しかしながら、RFの安定領域内に存在しながらもエネルギーのずれによって中心軌道が大きくずれ、エネルギーはそれ以上ずれなくともベータatron振動の振幅が共鳴により増大して失われる場合もある。ダイナミックアパーチャが寿命に影響する場合である。すなわち、タウシェック散乱による寿命を延ばす為にRF電圧を上げて安定領域を広げても、ダイナミックアパーチャがそれよりも狭ければ結局粒子は失われる為に寿命は延びないのである。また、残留ガスによって散乱された電子が放射減衰に依って再び蓄積ビームに取り込まれる場合にも、大振幅の電子の安定性、すなわち広いダイナミックアパーチャが必要であることは言うまでもない。この場合はダクト（物理口径）よりも広いダイナミックアパーチャが確保されていれば問題ない。なお、寿命を延ばす為のみならず、性能向上の為の工夫にも広いダイナミックアパーチャは必要である。ダイナミックアパーチャの狭いリングは何をやるにも難しい。

さて、以上でビーム光学の話を終えるが、現実の加速器においてはビーム光学だけでは現象を説明しきれない場合がほとんどである。例えば、今回説明したビームサイズや入射、寿命についてはビーム不安定性が非常に大きな影響を持つ。様々なビーム不安定が存在し、複雑に影響を及ぼすのであるが、それは別の機会にまわしたい。