放射光基礎講座（その6）

高エネルギー物理学研究所　宮原　恒昱

この講座の「その3」では放射光の輝度とボーズ縮重度との関係について，「その4」では，位相空間で見た保存則について述べた。今回は，それらを少し発展させて，非保存な量との関係について考えてみよう。前号（「その5」）は数式に重点をおいた記述となってしまったが，ここでは，「その3」および「その4」をひきついでやや定性的に考察することにする。

1．微分量としてのボーズ縮重度

まず，輝度が位相空間内で保存量であるにしても，放射光を収束すると「強度」が大きくなることは，利用者ならばだれしも経験していることであろう。またレーザーの利用者ならば，レーザー光をレンズ収束することによつて大気中に放電を起こさせることができることを知っているであろう。このとき，輝度やボーズ縮重度が保存量であるとすると，どのような「強度」が増大しているのであろうか。

ここでまずはじめに，遷移確率の式(Vol.5，No3 (1992)266の式(53)，(54)，(55))を思いおこしてみると，全立体角で積分したものは

$$W=\frac{32\pi^3}{137}\frac{c|\langle r\rangle|^2}{\lambda}n_B$$

であったが，微少立体角 $d\Omega$ 内の遷移確率は

$$Wd\Omega=\frac{8\pi^3}{137}\frac{c|\langle r\rangle|^2}{\lambda}n_B\,d\Omega \qquad (1)$$

で与えられることがすぐにわかる。この式は $d\Omega$ がゼロであれば，全く遷移が起きないことを示している。元来，$d\Omega$ は，ある空洞の中のモード数 n_M と関連づけられていた(Vol.5, No3 (1992)264の式(35), (36)参照）。これを微分形式で書くと

$$dn_M=L_xL_yL_z\omega^2d\omega d\Omega/(4\pi^3c^3) \qquad (2)$$

となるが，この式は，$d\Omega$ と dn_M が比例していることを明かにしている。すなわち，遷移確率の式(1)は，「いかに n_B が大きくとも，実際の遷移は，n_Bdn_M すなわち，実際に入射する光子数に比例する」という当然の結果を表わしているのである。

以上のことをも少し別の角度から見てみよう。位相空間内の輝度を ω および Ω の関数であることを明示して $B(\omega,\Omega)$ とかくと，$d\Omega dSdt$ の中に相対的バント副 $d\omega/\omega$ で入ってくる光子数 dN_P は

$$dN_P=B(\omega,\Omega)d\Omega dSdtd\omega/\omega$$

で与えられる。ただしここでは $dS=L_xL_y$ と考えてよい。これを用いると，体積 $L_xL_yL_z$ 内の光子数 dn_L は

$$dn_L=B(\omega,\Omega)d\Omega L_xL_yL_z\frac{L_z}{c}\frac{d\omega}{\omega} \qquad (3)$$

で与えられることがわかる。さてここでもう一度(2)式を用い，n_B がモード当たりの占有数であることを考察すると

$$n_B=\frac{dn_L}{dn_M}=\frac{4\pi^3c^3}{\omega^3c}B(\omega,\Omega)=\frac{\lambda^3}{2}\frac{1}{c}B(\omega,\Omega) \qquad (4)$$

という関係が得られる。この式は n_B も $B(\omega,\Omega)$ も同じような微分量であり，かつ位相空間内の保存量であることを示している。さて，$B(\omega,\Omega)$ が保存量であるとすると(3)式も，収束・発散などによっては変らない量であることが見てとれる。なぜな

ら収束によってL_xL_yを小さくしようとすればdΩが増大してしまうからである。

それではdΩの増大になって得をする量は何であろうか。その一つは，単位時間・単位面積当たりのエネルギーを表すポインティング・ベクトルであって，$B(\omega,\Omega)$の定義より

$$|\mathbf{N}| = B(\omega,\Omega)d\Omega\frac{d\omega}{\omega}\hbar\omega$$

$$= B(\omega,\Omega)\,d\Omega d\omega\hbar \tag{5}$$

と書くことができる。これをωで微分したものを$I(\omega)$と書くと

$$I(\omega) = B(\omega,\Omega)d\Omega\hbar \tag{6}$$

となるから，$|\mathbf{N}|$も$I(\omega)$もdΩによって得をする量であることがわかる。ところでこの同じ$I(\omega)$は，「その3」の(40)および(53)にも含まれる量でωについての微分量であることが明かである。そこでもう一度(1)式をじっと見ると，n_Bが(4)式により輝度と同様にωについての微分量であることから，(1)式もωについての微分量であることが，理解されるであろう。

2．電場の強さ

光を電磁波と考えると，強い光は強い電磁場に対応する。実際，電場は（ボルト/長さ）という単位をもつが，電場が大きければ，それに比例して荷電粒子に力がかかり，ミクロにみれば量子的な遷移をより高い率でひきおこすことになる。そこでまず単一モードの場合について，電場の強さEとn_Bとの関係を導いておこう。まず単位体積当りのエネルギー密度をUとすると

$$U = \frac{1}{8\pi}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) = \frac{1}{4\pi}|\mathbf{E}|^2 \tag{7}$$

よって体積V内に含まれるエネルギーε_Vは

$$\varepsilon_V = \frac{1}{4\pi}|\mathbf{E}|^2 V \tag{8}$$

さて，$V = L_xL_yL_z$としたとき，この空洞に含まれる，考えているモードのボーズ縮重度をn_Bとすると，明かに

$$\varepsilon_V = \hbar\omega\,(n_B + \frac{1}{2}) \tag{9}$$

となるから(8)，(9)を比較することにより

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{4\pi\hbar\omega}{V}(n_B + \frac{1}{2})$$

が得られる。時間平均をとると$\langle \mathbf{E} \rangle = 0$になるので，電場の強さといったときには，2乗平均が意味をもつことになる。

したがって結局

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle^{1/2} = 2\left(\frac{\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}\left(n_B + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \tag{10}$$

という関係が得られる。この式を見ると，n_Bだけでは電場はきまらないこと，考えている空洞の体積を与える必要があることが理解されるであろう。

ところで(2)式をみるとモード数は体積に比例している。したがって，体積を増やしてn_Mを大きくし，n_Bを一定にしたままn_Lを増やすことができる。この時(10)をみると，n_Bが一定でVだけ増大したので電場の強さは減少したようにみえる。しかし，一方でn_L/Vすなわち，エネルギー密度が不変なのだから(7)式により電場の強さも変ってはならないはずである。この矛盾をどのように解決したらよいであろう。実は，このような矛盾は，単一モードを考えているときにおきやすいものであるが，モードに，ある幅をもたせればとり除かれる性質のものである。実際にとり扱う電磁波は厳密に単一モードであることはあり得ない。光は必ず寿命をもっており，そのことが有限の周波数幅をもたらすので，完全な単一モードとはなり得な

いのである。

そこで電場の強さを書きなおして見よう。(4)式を考慮し

$$\langle E^2\rangle^{1/2} = 2\left(\frac{\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}(dn_L)^{1/2}$$

$$= 2\left(\frac{\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2}\left\{\left(n_B+\frac{1}{2}\right)dn_M\right\}^{1/2} \tag{11}$$

となるが，これは物理的に全く問題のない形をしている。すなわち，電磁場を不変にして，Ｖを増大させても，同様にdn_Mが増大して，キャンセルし，電場の強さは変らない，という当然の結果が得られるのである。

もちろん，光を収束したりすると電場の強さは増大する。それは(11)式に(2)式を代入して

$$\langle E^2\rangle^{1/2} = \frac{1}{\pi}(\hbar)^{1/2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^{3/2}\left\{\left(n_B+\frac{1}{2}\right)d\omega d\Omega\right\}^{1/2} \tag{12}$$

となることをみれば明かであろう。これをもう少し見やすくすると

$$\langle E^2\rangle^{1/2} = 2(2\pi)^{1/2}\left\{\frac{1}{\lambda^3}d(\hbar\omega)d\Omega\left(n_B+\frac{1}{2}\right)\right\}^{1/2} \tag{13}$$

となるから，(12)式または(13)式を用いると，光子エネルギー，バンド幅，立体角およびボーズ縮重度がわかれば電場の強さを計算することができるのである。

3．電場の重ね合せと干渉性

前節までにおいて，電場は収束・発散などによって変化する非保存の量であることをのべた。ここでは，そのような電場を重ね合わせたときに何がおきるかを考察しよう。

実はすでにVol.5, No.2の講座の「その２」において，複数の平面波を重ね合せたときの干渉性を，その中の式(18)を出発点にして論じた。そこでは，波長よりも小さい領域にとじこめられたＮケの電子から放出される電磁波のパワーは，１ケの電子が放出するパワーのN^2倍になり得ることを説明した。そこでの出発点は単色平面波であったが，ここではまず，このような干渉性には必ずしも単色性は必要でないことを明かにしたい。このことは，電場を表わす式(12)または(13)において，有限なバンド幅が含まれていること，むしろバンド幅が厳密にゼロである電場が存在しないことから，ある程度は想像がつくであろう。

たとえば**図１**のように時間的に変化する周期電場$E_1(t)$を考えよう。この電場を２つのピンホールをとおして斜めに観測したとする。このとき，斜めに見る角度を適当に選ぶと$E_1(t)$と“π”だけ位相の異った電場$E_2(t)$と，もとからの$E_1(t)$がそれぞれのピンホールからでてきたように見えるような，光路差を生ぜしめることができるであろう。具体的には，$E_1(t)$の周期をＴ，ピンホールの間隔をｄとしたとき，観測角θはｃを光速として

$$\theta d = cT/2 \tag{14}$$

という条件を満足させればよい。このようにすると，ピンホールから十分遠方では$E_1(t)$と$E_2(t)$が完全に打消し合って暗い稿をつくるであろう。

単色光を干渉させて完全に暗い稿をつくることはよく知られている。しかし，上の例では単色光

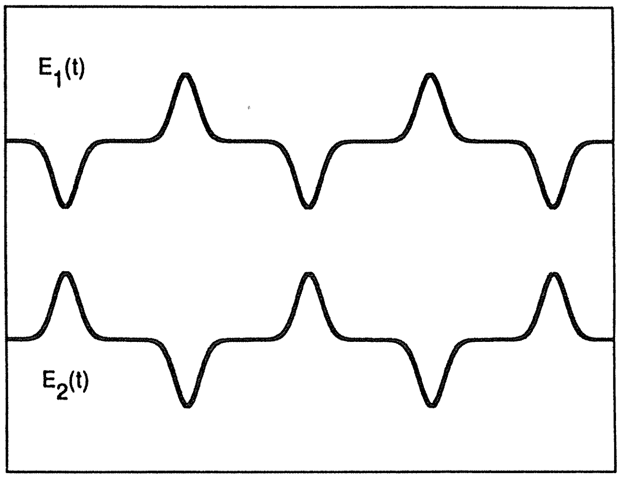

図　１

でなくとも干渉させ得ることを示している。この事情を少し考えてみよう。まず$E_1(t)$のような周期的な電場は，フーリエ級数に展開することができて，周期Tの成分の他に周期がT/M（Mは奇数）なる高調波を含むはずである。ところが，(14)式の条件が満足されていれば高調波に対しても光路差が波長の半整数倍になる条件が満足されて波の打消し合いがおきるのである。

以上のことは，まだ実験的に確かめられてはいないが，アンジュレータ光の軸上で観測される電場は，近以的に$E_1(t)$のように振まうので，適当なピンホールをおいてやれば，実験を行うことができる。もちろん，これがうまくいくためには，エミッタンスが十分に小さいことが必要である。またアンジュレータの周期数は有限であるから，これによって放出される電場は完全な周期関数ではない。したがってこの実験は近以的な意味しかもたないが，それでも非単色光の干渉性を明かにする点では十分な意味をもつであろう。

4．非単色光の多光子干渉性

前節であげた周期的電場による干渉は，本質的には一電子理論のワク内で成立する話である。多数の電子によるN^2効果は，電場の干渉という観点からは同様に扱えるのであるが，誘導放出の効果を含むので「多光子干渉性」と呼ぶことにする。空間干渉性や時間干渉性は，光の強度を犠牲にすれば，コリメータや分光器を用いて増大させることができる。しかし，ここで定義したような多光子干渉性は，個々の「放射源」を独立なものとみなしたとき，別の「放射源」からの光と干渉するという効果なので，そもそも「放射源」が多数存在することで意味をもつ干渉性である。その意味で，多光子干渉性は強度を犠牲にしても増大させることができない。

さて，ここで**図2**のような時間変化をする電場$E_3(t)$を考えよう。これは周期関数ではなく，単発のパルスであると仮定する。これをフーリエ変換

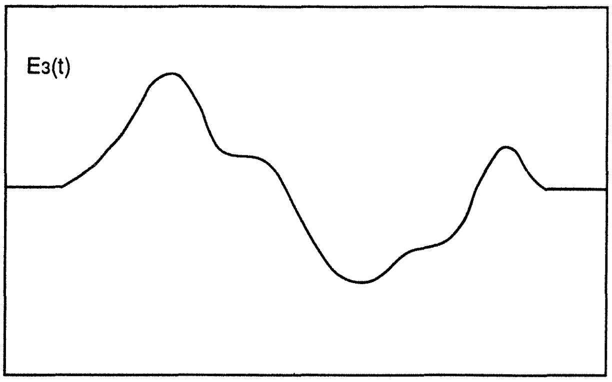

図　2

すると，もちろん無限に高い周波数を含むであろうが，ある波長λ_cをカットオフと考えて，それより短波長は考えないことにする。ここで$E_3(t)$なる電場は一電子の運動によって生じたと仮定する。そこで，その一電子のかわりにNケの電子をλ_cより十分小さい領域におしこんで，集団的に運動させたとすると，それによる電場は，おおよそ$E_3(t)$のN倍程度になるであろう。ただし，カットオフ波長があるので，それより長波長の成分にたいしてのみN倍になると考えられる。したがってこのような長波長領域では放射パワーはN^2倍になるであろう。

以上のことから，N^2効果にとって放射源から出てくる光の単色性は本質的なものではないことがわかるであろう。しかしまたN^2効果はFEL（線型加速器によるものを含む）で最終的に得られるパワーの上限をも与えることになる。小さいバンド幅内のパワーを増大させるために単色性を増大させることは，N^2効果とは独立に意味がある。しかし，アンジュレータの例でも明かなように，単色性の増大は，不要な波長の光のパワーをおさえることによってのみ実現できる。してがつてN^2効果で飽和に達している場合はNが一定である限り，全放射パワーを増大させて比例的に各波長のパワーを増大させることはできない。

このように述べると，放射光には上限があって夢がないように感じられるかも知れない。しかし

ながら，我々はVUV，X線領域では，この上限のはるか下にいるのである。この上限らしきものが実験的に観測されているのは，ミリ波の領域である。VUV，X線領域でこれを実現しようとすると，波長程度の領域に10^8～10^{10}個の電子を押し込まねばならないが，これは容易ではない。しかし，我々は今のところN倍の世界にいるので，N^2倍の世界に入り込んだとたんに，放射光は数ケタも強い光に急変するのである。

また，我々が非常に単色性の高い光の利用を考えるなら必ずしも一波長の中に多数の電子をつめこむ必要はない。たとえば10^8ケの電子を10^3ケずつのブロックにわけて，考えている波長の一つ一つに一定の位相で10^3ケの電子を入れ，全体として10^5ケの波の列ができているとしよう。このとき10^5ケの波のどの波にも一定の位相で10^3ケの電子が入っているから，アンジュレータ光としての単色性は，アンジュレータの周期数で決るのではなく$\lambda/\Delta\lambda$～10^5の大きな値になっているはずである。このことだけで$\Delta\lambda$内のパワーは数ケタ増大し，さらに波の中に10^3ケの電子が入っていることによってさらに6ケタほど得をするから全体として大きな得をすることになる。このような電子のつめこみ方を実現するには，特定の単色光に対してQ－値が高いような空洞が存在していなければならないので，いくつかの問題を解決せねばならないが，現在のところ，一波長の中に非常に多数の電子をつめ込むのとくらべてどちらが先に実現する可能性が高いか，まだ明かでない。

質　問　箱

本講座に対する読者からの質問を随時受け付けます。ご質問が有る場合は，下記へFAXでお寄せ下さい。可能な限り，著者が回答いたします。

日本放射光学会　事務局　FAX 03－3812－3997