放射光基礎講座（その４）

高エネルギー物理学研究所　宮原　恒昱

11．高輝度光の条件(2)回折限界

前号においては，高輝度光の満すべき条件のうち，ボーズ縮退度についてのべた。今回は，もう一つの条件すなわち「回折限界」について説明しよう。ボーズ縮退度との関係でいうと，回折限界にあるビームとは，与えられた空胴内の電磁場の可能なモードのうち，光の進行方向と垂直な横方向のモードがただ一つになっている状態に対応する。また別な観点で言えば，光の横方向の干渉性（transverse coherence）が最大になっている状態に対応する。このように，結論から先にのべてしまうと，かえって理解が難しくなる場合もあり得るので，以下に多少正確さを犠牲にして説明してみよう。

11-1　位相空間におけるビームの記述

加速器内をまわる粒子ビームにしろ，光ビームにしろ，ビームと呼ばれるものは，何らかの中心軸があって，そのまわりに粒子線（または光線）が分布しているという状態にある，ということができる。ビームはその包絡線がその中心軸とほぼ平行である。またビームをその進行方向に垂直な断面で見ると，一般に中心ほど密度が大きくなっており，また多くの場合その密度分布はガウス分布になっている。このようなビームの状態は位相空間における点の集合であると考えると都合がよい。**図11-1**は，ビームを多数の軌道の集合として描いたもので，Ｚ軸はビームの進行方向である。Ｚ軸に垂直な二軸のうち，Ｘ軸に投影したものが描かれていると理解して頂きたい。さて，この軌

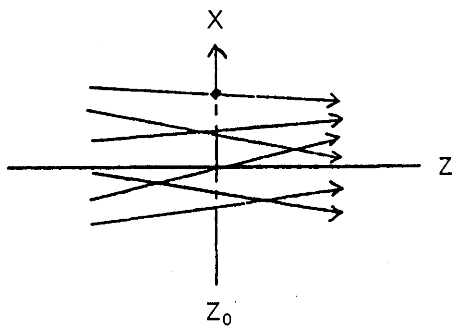

図11-1

道の集合をＺ軸上のある点$Z = z_0$のところで注目してみる。このとき，一本の軌道について二つの量が定義されることがわかる。その一つは，Ｚ軸からの変位xであり，もう一つはＺ軸にたいする傾き$dx/dz = x'$である。本来これら二つの量はzの関数であるから$x(z)$および$x'(z)$と書くべきであるが，簡単のため，特に必要がない限り，xおよびx'と書くことにする。

このようにして，一本の軌道に対して一つの点(x, x')が定義される。この点はＸ軸およびＸ′軸をそれぞれ座標軸とする位相空間内の一点にプロットすることができる。このようなプロットを多数の軌道にたいして行った結果は，たとえば**図11-2**のようになるであろう。ここでビーム断面の軌道の分布がガウス分布であると仮定しよう。この場合，点の密度は原点が最大でこれから離れるにつれて密度が低下する。そこで，ガウス分布の分散(σ)に相当する境界線を楕円で表すことにする。**図11-2**では，たまたま右に傾いた楕円になっているが，これは発散しつつあるビームを表している。なぜなら，右に傾いた楕円では，xが正の

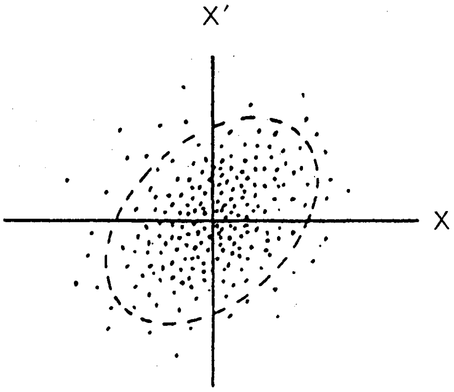

図11-2

ときx'が正であるという相関があり，これを実空間の包絡線で考えると，zの増加とともに増大する包絡線が描けるからである。まったく同様にして，左に傾いた楕円は，収束しつつあるビームを表すことがわかる。

以上のように，位相空間内における点の集合でビームを表現することは，光のビームであっても，幾何光学で扱う限り可能である。したがって，粒子ビームでも光ビームでも位相空間内で楕円を定義することができる。この楕円を用いてビームのエミッタンスを定義しよう。この楕円の面積をAとすると，エミッタンスWは，

$$W = A/\pi \tag{57}$$

で与えられる。位相空間をみればわかるように，エミッタンスは，長さの次元をもつが，軌道の傾きにも関係していることを明かにするために，m・radという単位を用いることが多い。またAそのものをエミッタンスとする場合もあるので，単位にπをつけて，πm・radという単位を用いることもあるが，ここでは(57)の定義を採用する。

エミッタンスはZ軸に直交する二つの軸，すなわちX軸とY軸の両方にたいして定義することができる。したがって一般には，(x, x', y, y')という4次元位相空間内の体積を用いて表現することができる。この場合X軸についてのエミッタンスとY軸についてのエミッタンスをこみにした保存則を考えることができる。すなわち，それぞれのエミッタンスは可変であってもよい。しかし，普通はX軸についてのエミッタンスとY軸についてのエミッタンスは独立に扱うことができ，それぞれ独立な保存則を考えることができるのである。

11-2　エミッタンスの保存則

ビームが単に直進したり，収束したり発散したりする場合，見かけ上の包絡線の大きさすなわちビームサイズは変化する。このときでもエミッタンスの大きさは保存されるというのが，ビームの振まいについての重要な法則である。このエミッタンスの保存則を光ビームの場合について考察してみよう。

まず，光ビームが直進する場合を考えてみる。直進距離をℓとしたとき，位相空間内の点(x_0, x'_0)は$(x_0+\ell x'_0, x'_0)$に変換される。変換後の点を(x, x')として行列でこの関係を表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

となる。つぎに，光ビームが集束される場合はどうなるか。収束の場合Z軸上の同じ場所でx'_0が不連続な変化をうける。この変化量はx_0に比例するとともに収束系の焦点距離に反比例する。この関係を行列で表わすと

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \tag{59}$$

となる。ただしfは収束系の焦点距離で発散の場合は負の値をとる。また，鏡面反射を伴っている場合，座標軸の定義によっては，(59)式の行列の各要素の符号を反転させる必要がある。

さて，光ビームを輸送する場合，直進，収束または発散のための光学系を通過していく。これらの全体の効果は，それぞれ対応する行列の積で表

わすことができる。ところで，(58)式および(59)式の行列式は1であるから，それらの積でつくれらた行列式も1である。このような行列によって，ある位相空間内の楕円は別の楕円に変換されるが，楕円の面積は不変である。このことから，エミッタンスも不変であることが結論される。

電子ビームの場合は光ビームと異り，直進距離がゼロでx'が有限な変化をするような収束系または発散系はない。すなわち，収束・発散系はゼロでない有限な厚さを持つ。この場合でも，微少な厚さについて微少なx'の変化が生ずると考え，そのような効果の積み重ねで収束・発散がおきると考えれば，その効果を表す行列の行列式は1である。よって電子ビームについても，エミッタンスは保存されるのである。

11-3　光の最小エミッタンスと回折限界

今までの議論では，ビームを構成する粒子の軌道を幾何光学的にとりあつかってきた。しかし光ビームについては，その波動性を考慮しなければならない。波動性はまず回折効果として現れる。すなわち光ビームのサイズを小さくしようとすると回折により，光線の方向に傾きがついてしまうのである。このことから，光ビームの場合，位相空間内の楕円の面積をゼロにすることはできないのである。いま，楕円の式を

$$ax^2+2bxx'+cx'^2=1 \tag{60}$$

で表わすと，この面積Aは

$$A=\pi/(ac-b^2)^{1/2} \tag{61}$$

で与えられる。この面積は回折効果によって，ある最小値をもつがこの最小値は波長λに比例するはずである。後に示すように，この最小値A_{min}は

$$A_{min}=\lambda/4 \tag{62}$$

で与えられ，したがって最小のエミッタンスは，

$$W_{min}=\lambda/(4\pi) \tag{63}$$

で与えられる。したがって(61)より

$$ac-b^2=(4\pi/\lambda)^2 \tag{64}$$

という関係が得られる。

さて，いよいよ回折限界によるエミッタンスの下限を見積ってみよう。このためには，実際に回折をおこすようなスリットを考えねばならない。ところで通常のスリットは矩形的な透過特性を持っており，このスリットによる回折の計算も容易であるが，ここでは仮想的なスリットを用いる。すなわち光ビーム中の光線密度がガウス分布になることを考慮し，X軸方向にガウス分布をもつ透過特性をもつスリットを考えるのである。一様な分布をもつ光ビームがこの仮想的なスリットを通った直後では，X軸にそった強度分布はガウシアンになるので，このようなビームは「ガウシアン・ビーム」とよばれる。

計算の都合上，まず強度ではなく振幅について考え，あとで強度について考えることにする。振幅については重ね合せの原理が成立するので計算は容易である。ここで，上記の仮想スリットのガウス分布の分散を2σとし，Z軸にたいしてθだけ傾いた光線の強度を計算する。まずX軸上の$X=0$および$X=x$をとおる2本の光線の位相差をϕとすると

$$\phi=(2\pi/\lambda)x\sin\theta\cong(2\pi/\lambda)\theta x \tag{65}$$

となる。ここで$2\pi\theta/\lambda=\delta$とおいて，電場の振幅Eをスリットを通るすべての光に対して重ね合わせると

$$E=\int\exp(-x^2/(2\sigma^2))\exp(-i\delta x)\,dx \\ \propto\exp(-\sigma^2\delta^2/2) \tag{66}$$

となる。上式は，Eの分布がδについてもガウス分布であることを示している。この分布の分散は

$$\langle\delta^2\rangle^{1/2} = 1/\sigma = (2\pi/\lambda)\langle\theta^2\rangle^{1/2} \tag{67}$$

となるが，$\langle\theta^2\rangle^{1/2}$は，位相空間内における$x'$の広がりを表わす量$\sigma_{x'}$と等しいとみなすことができる。ここで$\sigma=\sigma_x$と書きなおすと(67)より

$$\sigma_x\sigma_{x'} = \lambda/(2\pi)$$

という関係が得られる。ここで，振幅の分布から強度の分布へ書き換えねばならない。強度は振幅の2乗で表わされるが，ガウシアンを2乗すると分散が$1/2^{1/2}$倍になることは容易にわかる。したがって，強度についての分布では

$$\sigma_x \to (1/2^{1/2})\sigma_x$$
$$\sigma_{x'} \to (1/2^{1/2})\sigma_{x'}$$

とおきかえる必要があり最終的に

$$\sigma_x\sigma_{x'} = \lambda/(4\pi) \tag{68}$$

という関係が得られるのである。σ_xおよび$\sigma_{x'}$を2軸とする楕円の面積は$\pi\sigma_x\sigma_{x'}$であるから，(68)より，(62)が得られるのである。

11-4　ガウシアン・ビーム

仮想スリットを用いた回折限界ビームでは，実際にビームの幅を制限しているものは，この仮想スリットそのものである。それにもかかわらず，この制限の影響は遠方まできいており，ビームの有限な発散角を生みだしているのである。したがって十分に遠方から観測すると，スリットから放出された球面波の包絡線は，ほとんど直線となり，幾何光学的光線とかわらないように見えるであろう。逆に，スリットからあまり遠くない距離でこの包絡線を観察すると，これは直線では近似できず双曲線になる。以上のことを，位相空間内の楕円を用いて定量的に記述してみよう。

まず，仮想的スリットの部分をZ＝0として，この場所における楕円を

$$a_0x_0^2 + c_0x'^2_0 = 1 \tag{69}$$

とかこう。Z＝0は，ビームのくびれ部分であるので包絡線の傾きはゼロである。したがって楕円も傾いていない。また(69)において

$$a_0 = 1/\sigma_x^2,\quad c_0 = 1/\sigma_{x'}^2 \tag{70}$$

である。さてZ＝0における位相空間内の点(x_0, x'_0)がZ＝lで点(x_1, x'_1)に変換されたとしよう。このとき(x_1, x'_1)は傾いた楕円となるであろう。逆にいえば，(x_1, x'_1)を$-\ell$だけ進んで(x_0, x'_0)にもどすと，この点は式(69)を満足するはずである。そこで

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \tag{71}$$

に注意して，(69)より

$$a_0(x_1 - \ell x'_1)^2 + c_0x'^2_1 = 1$$

すなわち

$$a_0x_1^2 - 2a_0\ell x_1x'_1 + (a_0\ell^2 + c_0)x'^2_1 = 1 \tag{72}$$

という傾いた楕円が得られる。これからx_1の最大値x_{max}を求めると

$$x_{max} = \left(\frac{\ell^2}{c_0} + \frac{1}{a_0}\right)^{1/2}$$

となるがこれは$z=\ell$なるすべてのzについて成立するから

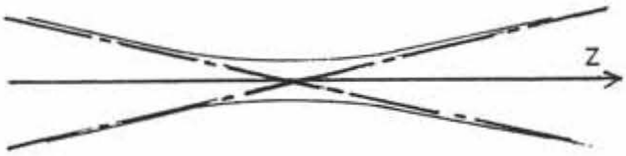

図11-3

$$x_{max}=\left(\frac{z^2}{c_0}+\frac{1}{a_0}\right)^{1/2} \qquad (73)$$

が得られる。 x_{max}は包絡線を表すが，(73)式は，それが双曲線であることを表わしている。このことから

$$z \leq (c_0/a_0)^{1/2}=\sigma_x/\sigma_{x'} \qquad (74)$$

程度の範囲では，包絡線は，直線からかなりはずれており，したがって波動光学的効果が重要であることがわかる。(73)式で表わされる包絡線の様子を図**11-3**に示す。十分zが大きいところでは，$x_{max}=z/c_0^{1/2}$という漸近線に近づいていくことがわかるであろう。

以上のことから，zが十分に大きければ，いつでも幾何光学でよいと考えるのは早計である。光学系が何らかの収束系をもっている場合は，その収束点近傍でふたたびガウシアン・ビームが構成される。たとえば分光器の入射スリット上で回折限界ビームが収束されるときは，σ_xの小さいガウシアン・ビームとなるであろう。このときスリット幅をを$2\sigma_x$以下の幅にしても強度を損するだけで，ビームにたいして何の性質向上ももたらさない。このような理想的な場合は，入射スリットは不要である。

質　問　箱

本講座に対する読者からの質問を随時受け付けます。ご質問が有る場合は，下記へFAXでお寄せ下さい。可能な限り，著者が回答いたします。

日本放射光学会　事務局　FAX 03－3812－3997