放射光基礎講座（その３）

高エネルギー物理学研究所　宮原　恒昱

10．高輝度光の条件(1)ボーズ縮退度

前号において，自由電子レーザーとの関連で高輝度光の必要性についてのべた。ここでは高輝度光とは，どのような条件を満すものであるのかもう少し詳しく考察してみよう。

通常，高輝度光と言えば，「低エミッタンス」とか「回折限界」という言葉と結びつけられて論じられることが多い。これらの言葉は，簡単に言えば放射光ビームをどれだけ細くて平行にできるかということにかかわっている。光の波動性を考えると，光を無限に細くしてかつ完全に平行にすることは不可能であることから「回折限界」という概念が生まれた。一方，光量子という考え方にたつと，光を細く平行にすることは，その空間内の可能なモードのうち，横方向のモード数を減らすことに相当する。モード数を減らすと，全体としての光量子数が一定ならば，１つのモード当りの光量子の数を増大させることになる。そこで，この節では，モードと光量子数との関係から，ボーズ縮退度n_Bを表す式を導いておこう。このn_Bは，前号の(20)式内の$n_{k\alpha}$と本質的に同等なものである。

まずモードの数を計算するには適当な空胴共振器を考える必要がある。ここでは，レーザーのような凹面鏡を用いた空胴ではなく，簡単のために長さがL_x，L_y，L_zの３辺で作られた直方体の空胴を考えてみる。光のモードは波数ベクトル$\mathbf{k}=(k_x, k_y, k_z)$という３つの数の組合せで表わされるから，実空間で考えるより，波数空間で考えるほうがわかりやすい。k_x，k_y，k_zはそれぞれ

$$k_x=\frac{2\pi n_x}{L_x},\ k_y=\frac{2\pi n_y}{L_y},\ k_z=\frac{2\pi n_z}{L_z}$$
$$n_x,\ n_y,\ n_z=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots\cdots \tag{34}$$

で表わされるから，無限個の$\mathbf{k}$が存在することになる。上式では周期的境界条件を用いたので，n_x，n_y，n_zは正負どちらの値もとれるようになっている。これと異なる境界条件すなわち空胴の境界での振幅をゼロとするという条件では，例えば$k_x=\pi n_x/L_x$となるが，この場合はn_xをゼロまたは正の整数に限定しないと，定在波で２つの波を数えすぎてしまう。n_xをゼロまたは正の数と限定すれば，モードの数を考えるときは(34)式と何の矛盾も生じない。

さて(34)式を，$\mathbf{k}$空間でみると，k_x軸，k_y軸，k_z軸に規則正しくならんだ格子点がみられるはずである。この格子点の数を数えるには，$k_{x,y,z}$が非常に大きいとして，連続体近似を用いる。そうすると，$\mathbf{k}$空間内の微少体積$dk_xdk_ydk_z$内に含まれる格子点の数は

$$\left(\frac{L_x}{2\pi}\right)\left(\frac{L_y}{2\pi}\right)\left(\frac{L_z}{2\pi}\right)dk_xdk_ydk_z$$

となる。ここで$dk_{x,y,z}$は正負両方の値をとることができる。さらに$dk_xdk_ydk_z$を$\mathbf{k}$空間内の半径$k=|\mathbf{k}|$の球面上の厚さdkの微少体積$k^2dkd\Omega$でおきかえる。ここで$d\Omega$は微少立体角である。そうすると，格子点の数は

$$\frac{1}{8\pi^3}L_xL_yL_zk^2dkd\Omega$$

となる。ここで，光の自由度は1つのモードについて2つあることを思い出してもらいたい。2つの自由度とはその偏光状態に関するものであり，たとえば右円偏光と左円偏光など独立な2つの基底をもつことを意味する。したがって格子点の数を2倍したものがモードの数n_Mであり

$$n_M=\frac{L_xL_yL_z}{4\pi^3}k^2dkd\Omega \tag{35}$$

で表わされる。これを$k=\omega/c$を用いてωで表わすと

$$n_M=\frac{L_xL_yL_z}{4\pi^3c^3}\omega^2d\omega d\Omega \tag{36}$$

となる。上式に関連して，いくつか有用な式を導いておこう。まず，$\omega=\lambda/(2\pi c)$ を用いて(36)式を変形すると

$$\begin{aligned}n_M&=2\left(\frac{L_xL_yL_z}{\lambda^3}\right)\left(\frac{\lambda}{2\pi c}\right)^3\omega^2d\omega d\Omega\\&=2\left(\frac{L_xL_yL_z}{\lambda^3}\right)\frac{d\omega}{\omega}d\Omega\\&=2\left(\frac{L_xL_yL_z}{\lambda^3}\right)\frac{dE}{E}d\Omega\end{aligned} \tag{37}$$

上式を$\rho(E)dEd\Omega$と表わすと

$$\rho(E)=2\left(\frac{L_xL_yL_z}{\lambda^3}\right)\frac{1}{E} \tag{38}$$

という，エネルギー状態密度が得られる。

さて，以上のようにして，与えられた空胴内の電磁場のモードを与える式が得られたので，次に行うことは，通常の光ビームの強度と光子数とを結びつける式を得ることである。まず，単位体積あたりの電磁場のエネルギーUは，ガウス単位系で

$$U=(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2)/(8\pi)$$

で表わされる。また実際のエネルギーの流れを表わすポインティグ・ベクトル**N**，すなわち単位面積・単位時間あたりのエネルギーの流れは$|\mathbf{N}|=cU$で表わされるが，これが通常われわれが光強度$I(\omega)d\omega$とよんでいるものに等しい。以上より，直方体($L_xL_yL_z$)内の光子数をn_Lとし，そのエネルギーを$\hbar\omega$とすると

$$n_L=UL_xL_yL_z/(\hbar\omega) \tag{39}$$

かつ

$$N=cU=I(\omega)d\omega \tag{40}$$

となるから

$$n_L=L_xL_yL_zI(\omega)d\omega/(\hbar\omega c) \tag{41}$$

と書くこともできる。以上より，ボーズ縮退度n_Bは，(36)と(41)を用いて

$$n_B=\frac{n_L}{n_M}=\frac{4\pi^3c^2I(\omega)}{\hbar\omega^3d\Omega} \tag{42}$$

となる。これから$I(\omega)$についてのいくつかの表現

$$I(\omega)=\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3c^2}n_Bd\Omega \tag{43}$$

$$=\frac{\hbar\omega}{\pi}\frac{n_B}{\lambda^2}d\Omega \tag{44}$$

が得られる。(44)と(41)より

$$\begin{aligned}n_L&=\frac{L_xL_yL_z\hbar\omega^3}{4\pi^3c^2}n_Bd\Omega d\omega/(\hbar\omega c)\\&=\frac{2L_xL_yL_z}{\lambda^3}n_Bd\Omega\frac{d\lambda}{\lambda}\end{aligned} \tag{45}$$

というωも$\hbar$も含まない関係式も得られる。

次に行うべきことは通常の放射光の強度の表式に近い形で表わすことである。まず(45)より

$$n_B=\frac{\lambda^3}{2L_xL_yL_z}\frac{n_L}{d\Omega}\frac{\lambda}{d\lambda} \tag{46}$$

いま，L_x，L_y，L_zと$d\Omega$のかわりに，体積$V=\pi\sigma_x\sigma_y c$，および立体角$d\Omega=\pi\sigma_{x'}\sigma_{y'}$内の光子数を$N_p$が知られているとすると，これはちょうど面積$\pi\sigma_x\sigma_y$を微小立体角$d\Omega$をもって一秒間に通過する光子数に等しい。よって(46)をかきかえて

$$n_B=\frac{\lambda^3}{2\pi^2\sigma_x\sigma_y\sigma_{x'}\sigma_{y'}}\frac{N_p}{c}\frac{\lambda}{d\lambda} \qquad (47)$$

という関係が得られるので，これからn_Bを見つもることができるのである。(47)式を見れば明かなように分母が小さいほど，すなわちビームサイズσ_x，σ_yおよび発散角$\sigma_{x'}$，$\sigma_{y'}$が小さいほどn_Bが大きくなるのである。これらの値を最小限にしたのが，「回折限界」に相当するが，後にのべるようにこの限界では

$$\sigma_x\sigma_{x'}=\sigma_y\sigma_{y'}=\lambda/(4\pi)$$

である。したがって(47)は

$$n_B=\frac{8\lambda N_p}{c}\frac{\lambda}{d\lambda}=\frac{16\pi N_p}{\omega}\frac{\lambda}{d\lambda} \qquad (48)$$

と書き表わすことができる。例として$\lambda/d\lambda=10^3$，$\omega=10^{17}$，$N_p=10^{13}$photons/secの場合を考えると

$$n_B\simeq5.0$$

となり，１に比べて十分大きい値が得られることになる。

放射光の強度を表すのに「輝度(Brilliance)」という単位が用いられることが多い。「輝度」の単位としては，photons/(sec・mm²・mrad²・0.1％b.w.)という単位が用いられることが多い。この単位と(47)式と比較してみると

$$輝度\sim\frac{N_p}{\pi^2\sigma_x\sigma_y\sigma_{x'}\sigma_{y'}} \qquad (49)$$

という類似性があることがわかる。この関係の意味を理解するには，光のビームの振まいを記述するための「位相空間」という概念が必要であるが，これについては後に詳しくふれることにしよう。ここでは，とりあえず輝度をB_pとおいて(47)を次のように書換えてみる。

$$n_B\sim\frac{\lambda^3}{2}B_p\frac{1}{c}\frac{\lambda}{d\lambda} \qquad (50)$$

この式は，輝度が与えられたときに，ボーズ縮退度を見積るためには厳密ではないがきわめて有用な式である。しかし実際に，B_pの値を代入するときには注意することが二つある。その一つは，光量子の密度は，瞬間的な量が重要なので，輝度についても瞬間的な最大値を用いたほうがよいということである。蓄積リング内の電子ビームはバンチ状になっているから，平均電流よりも，バンチ内に集中した最大電流が重要であるということになる。平均値に比べてその最大値がどのくらい大きくなるのかを示すファクターをＦとすると

$$F=I_{max}/I_{av}=C_O/(m_B L_B) \qquad (51)$$

で与えられる。ただし，I_{max}，I_{av}は，瞬間最大電流および平均電流，C_O，m_BおよびL_Bはそれぞれリングの周長，蓄積バンチ数および１ケのバンチの長さである。特に単バンチで運転しているとき，Ｆは非常に大きな値になる。もう一つの注意すべき点は，単位の統一である。輝度の単位の中には，mm^{-2}，$mrad^{-2}$という量が含まれているが，メートルで統一する場合には，B_pに10^{12}をかけなければならない。

以上の注意をふまえて具体的な例を見積ってみよう。第一の例として$\lambda=100Å=10^{-8}m$, $B_p=10^{16}$ photons/(sec・mm²・mrad²・0.1％b.w.)の場合を考えると，$\lambda/d\lambda=10^3$に注意して

$$n_B\sim\frac{F}{2}\times10^{-24}\times10^{16}\times10^{12}\times\frac{10^3}{3\times10^8}$$
$$=1.6\times10^{-2}F$$

となる。多バンチ・モードでは$F \geq 10$，単バンチ・モードでは$F \geq 100$程度と考えられる。したがってたとえば単バンチモードでは

$n_B \sim 1.6$

という結果が得られることになる。次の例として，いわゆる「第三世代」の高輝度リングを考えてみよう。この場合，B_Pの値は2ケタ増大して10^{18}程度になり，またバンチ長も短かく周長が長くなって，単バンチモードでは$F \sim 10^3$程度になるので

$n_B \sim 1.6 \times 10^3$

程度のボーズ縮退度が得られると予想される。さらにまた，巨大な周長をもったリングを用いる「第四世代」型の計画ではB_Pの値は，さらに3ケタ以上も大きくなると考えられるのでn_Bは10^6程度が期待される。

(47)式を見ると明らかなように，ボーズ縮退度はλ^3に比例しているので短波長になるほど急激に小さくなる。したがって，短波長領域になるほど，大きな輝度が必要となるのである。

以上までの話で，放射光の強度とボーズ縮退度がどのように関連しているかについて，ある程度イメージをつかんでいただけたと思う。(47)より明かなように，ボーズ縮退度はビーム・サイズやビームの発散角と密接に結びついていることは特に注目すべきである。この式の分母に表われている量は放射光ビームの横方向のふるまいに関係している。特に，後に述べる「回折限界」という条件では横方向のモードはただ1ケになってしまっていることがわかる。ボーズ縮退度は，元来(42)式のように，各モード当りの縮退度で表わされているから，モードの数が減れば，縮退度が大きくなるのは当然のことである。特にレーザー用の共振器は強度を重視する場合は横方向の占有モードを単一にして用いられるように設計されている。これに比べて縦方向には非常に多数のモードが存在することは，共振器のL_zが大きいことから導かれる当然の結論である。ただし(47)式には直接L_zが含まれていないことに注意されたい。元来(40)式には空胴のサイズ$L_{x,y,z}$は含まれていないから，$I(\omega)$もそれらを含まない。したがって，ボーズ縮退度も(42)式の表現では空胴のサイズを含んでいないのである。しかし，これは見かけ上の話であって，$I(\omega)$は単位面積当りのエネルギーに関係しているから，本来L_x，L_yを分母に含んでいると考えられる。それ故，最終的な式(47)には，$L_x(=\sigma_x)$，$L_y(=\sigma_y)$を含んでいるがL_zを含まないのである。また，以上の式に含まれている$d\Omega$という立体角は，あまり大きくできないことを注意しておこう。それは(40)において，ポインティング・ベクトルを事実上，単一の方向に限定して，スカラー量にしてしまっているからである。しかし，それにもかかわらず，(35)，(36)および(37)式は，モード数の計算であるから，$d\Omega$を4πラジアンにわたって積分したものも厳密に正しい。たとえば(38)を$d\Omega$について積分した，エネルギー状態密度は

$$\rho'(E) = 8\pi\left(\frac{L_x L_y L_z}{\lambda^3}\right)\frac{1}{E} \tag{52}$$

で与えられるのである。

この節の最後に，ボーズ縮退度を用いた表式がなぜ重要であるかについて少しふれておこう。それは，量子力学的な遷移確率Wが以下のようにしてn_Bと関連しているからである。まず，光を量子化しない半古典的扱いでは

$$W = \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2 c} I(\omega)\,|\langle \mathbf{r} \rangle|^2 \tag{53}$$

で表わされる。この式の分母の3は，全立体角を考えているために現れるファクターである。この式に(43)式を全立体角で積分したものを代入すると

$$W = \frac{4e^2}{3\hbar c^3}\omega^3 |\langle \mathbf{r} \rangle|^2 n_B \tag{54}$$

上式は$\omega=2\pi c/\lambda$を用いて書き換えることができる。このとき，微細構造定数が$e^2/(\hbar c)\cong 1/137$であることに注意する。そうすると例えば

$$W=\frac{32\pi^3}{137}\frac{c|<r>|^2}{\lambda^3}n_B \tag{55}$$

または

$$W=\frac{16\pi^2}{137}\omega\frac{|<r>|^2}{\lambda^2}n_B \tag{56}$$

という関係が得られる。

(54)，(55)および(56)は実は誘導吸収についての表現である。放出については，誘導放出と自然放出の両方を考慮して，n_Bのかわりにn_B+1とする必要がある。

(56)式の物理的な内容は，きわめて明白である。電磁場が一回振動する時間内に遷移する確率は，双極子遷移行列要素$|\langle r\rangle|$と波長との比の2乗に比例し，なおかつ入射光子数のボーズ縮退度に比例するということを意味している。

また，(54)，(55)および(57)は，2光子吸収などの多光子過程の起りやすさについての目安を与えてくれる。例えば2光子吸収の確率は，エネルギー準位の状態密度が同じとすれば，(56)式に$|\langle r\rangle|^2 n_B/(137\lambda^2)$をかけた程度のオーダーとなるから，$n_B$が十分に大きければ高い確率で2光子吸収が起こり得るわけである。この意味では，第三世代または第四世代のVUV・軟X線の放射光源においては，可視光レーザーでおきるような多光子過程，非線型効果が起きることが期待されるのである。

質　問　箱

本講座に対する読者からの質問を随時受け付けます。ご質問が有る場合は，下記へFAXでお寄せ下さい。可能な限り，著者が回答いたします。

日本放射光学会　事務局　FAX 03－3812－3997