

放射光の性質 II

宮原 恒 昱

高エネルギー物理学研究所

前号では、放射光の性質を、その波動性を考慮しながら解説した。そこで明らかになったことを要約すると

- a) 干渉性には、たて方向と横方向のものがあり、それら両方の干渉条件が満足されたときにのみ実際の干渉効果が現れること。また、それぞれの干渉性は光の観測の仕方にかかっていること。
- b) 光のエミッタンスには、回折限界からくる最小エミッタンスが存在すること。

さて今号では、上記の原理をふまえて、実際の放射光の性質を論じてみよう。

〔1〕 偏向電磁石からの放射

(1) 短波長限界

偏向電磁石内の電子軌道は図1のように曲率半径を R とする円軌道である。周知のように、この電子からの放射は連続スペクトルであるが、あるエネルギーより高いエネルギーの光強度は急に弱くなる。言いかえれば、かなりシャープな短波長限界がある。そこで、以下に定性的ではあるが、この短波長限界が、どのように導びかれるかを示してみよう。

まず、図1の0点で電子の運動を観測すると、電子が水平面内で一回振動したように見えるであろう。この一回振動の周期を T とすると相対論的

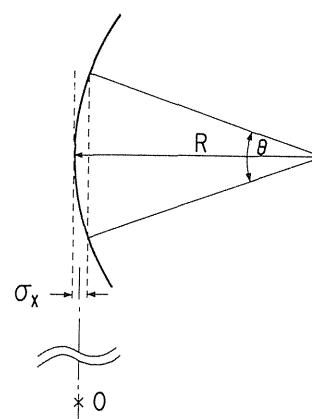


図1

なドップラー効果により、観測者にとっては電子が、 T よりはるかに短い周期 τ で振動しているように見える。したがって、より短い部分を観測すればするほど、またドップラー効果が大きければ大きいほど、より短波長の光を観測することになるのである。

さて、 T と τ の間にはどのような関係が成立するだろうか。これを調べるには、古典的な「追いかかけ算」の例を考えればよい。すなわち、いま考えている長さの先端部分から信号が発射されたとし、電子がその後を光速に近い速度で追いかけていき、別の地点で第二の信号を出したとしよう。電子の軌道は一般に曲線であるが、これを Z 軸に射影した平均的な速度を v としよう。二つの信号の間隔は追いかかけ算の原理により

$$\tau = T(c - v) / c \quad (1)$$

という関係で短くなることがわかる。すなわち観測される波長も $(c - v) / c$ というファクターで短縮されるのである。

ところで v は Z 軸に射影した平均速度であるから、電子の早さ u に対してわずかに小さな値となっており、

$$v = (1 - \delta) u \quad (2)$$

とおくことができる。 δ は1に比べて、はるかに小さい量である。さて①式の中のファクターを②を考慮して変形する。このとき、 u 、 v が c とあまり変わらないことに注意する。

$$\begin{aligned} \frac{c - v}{c} &\cong \frac{c - u}{c} + \delta \\ &= \frac{c^2 - u^2}{c(c + u)} + \delta \\ &\cong \frac{c^2 - u^2}{2c^2} + \delta \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \delta \\ &= \frac{1}{2\gamma^2} + \delta \\ &= \frac{1}{2\gamma^2} (1 + 2\gamma^2\delta) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 γ は電子エネルギーを静止エネルギーを単位として表したもので

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = 1 / \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

で表される。 γ は高エネルギーの物理現象の記述にしばしば現れる重要な量である。

また③式の関係は、アンジュレータ光の波長の公式などにしばしば形をかえて顔を出してくる重要な関係である。

ここでもう一度、偏向電磁石の軌道が円軌道であることを思いおこそう。そして円軌道に対して、平均速度 v がどうなるかを見積ってみよう。いま図1において、角度が $-\theta/2$ から $\theta/2$ までの円弧の部分のみを観測するとして、 θ の大きさは今のところ未知数であるが、これは後で決まる量である。 $\theta = 0$ に対応した点の Z 軸の原点として $z = 0$ とする。

いま考えているのは θ の小さな領域であるから、

$$\theta \cong \frac{z}{R}, \quad \cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

などと近似できる。また電子軌道を Z 軸に射影したときに遅くなるファクターは明らかに $\cos \theta$ である。それ故、 $\cos \theta$ を $-\theta/2$ から $\theta/2$ までにわたって平均する必要があるが、それは以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \cos \theta \text{ の平均} &= \langle \cos \theta \rangle \\ &\cong 1 - \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle \\ &= 1 - \frac{1}{2\theta} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_{-\theta/2}^{\theta/2} \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{24} \end{aligned}$$

よって

$$v = \left(1 - \frac{\theta^2}{24} \right) u$$

となる。すなわち②式の δ は

$$\delta = \frac{\theta^2}{24} \quad (4)$$

とかける。

次に、観測者は、円弧のどの部分を観測するのか、すなわち θ を求める方法を考えよう。それには前号で述べた回折限界（前号の⑥式）という考えを用いる。

角度 $\pm\theta/2$ の部分を観測するとすると、軌道のまがりにより

$$\sigma_x = R(1 - \cos \frac{\theta}{2}) \cong R \frac{\theta^2}{8}$$

という幅がついて見える。エミッタンスは、これに $\sigma_{x'} = \theta/2$ をかけて

$$W = \sigma_x \sigma_{x'} = \frac{R}{16} \theta^3 \quad (5)$$

となるが、これは回折限界 $\lambda/(4\pi)$ より小さくならないから

$$\frac{R}{16} \theta^3 \geq \lambda/(4\pi) \quad (6)$$

となる。一方、観測する波長は、単振動の1周期分に相当すると仮定し、弧の長さが $R\theta$ であること、さらに、③、④式に注意すると

$$\lambda \cong R\theta \left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{24} \right) \quad (7)$$

となる。⑥式で等号の成立する場合について⑦を代入すると

$$\frac{R}{16} \theta^3 = \frac{R\theta}{4\pi} \left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{24} \right)$$

これから

$$\frac{\pi}{4} \theta^2 = \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{24}$$

が得られ、したがって

$$\theta \cong \frac{1}{\gamma} \quad (8)$$

なる関係が得られるのである。

以上のことから、われわれが観測できる弧の部分を角度に換算すると約 $1/\gamma$ の程度であることがわかる。この値は、エミッタンスの回折限界を考慮して導びかれたものであるから、この角度より小さい弧の部分を観測することは、不確定性関係により不可能であることに注意していただきたい。

さて⑧を⑦式に代入すると、観測される短波長限界が得られる。すなわち

$$\lambda_{min} \cong \frac{R}{2\gamma^3} \quad (9)$$

実際、この値は、円軌道から放射される光の短波長限界に近い。これはそれぞれの電子蓄積リングについて、 R や γ の値を⑨式に代入してみれば容易に確かめられる。

ところで、以上の考察をもう少しふり返ってみることにしよう。われわれは、厳密に電磁場を計算して、フーリエ変換するなどという複雑な手続きをとらずに、定性的に λ や θ を求めてきた。その際、以下の三つのことを前提にしてきた。それらは、①光速に近い運動に対する相対論的ドップラー効果により、観測される波長が著しく短くなること。②観測される光のエミッタンスの回折限界が存在すること。③円軌道の一部を単振動の一回分とみなすこと、であった。そのうち①、②は本質的に重要な要請で、普遍的な物理の原理から

くるものである。しかし③には近似がはいっている。円軌道の一部は、アンジュレータの場合と異なり、厳密には単振動とは異っているからである。このような近似の故に、上の結果は定性的な結果となっているのである。実際には短波長限界より長波長の光が連続的に含まれており、長波長になると回折限界によるエミッタンスが大きくなるので、角度発散も γ^{-1} より大きくなる。この大きくなり方は、⑥式によれば $\lambda^{1/3}$ という依存性を示すはずであるが、水平方向の角度発散は測定が困難なので実験値との比較はむずかしい。

一方、垂直方向の角度発散を ϕ とすると、上と同様の考察によって、短波長限界近傍では、 ϕ も γ^{-1} 程度であることがわかる。しかし、明らかに $\sigma_y \propto \phi$ 、 $\sigma_y' \propto \phi$ という比例関係があり、両者の積が回折限界で λ に比例することを考慮すると

$$\phi \propto \lambda^{0.5} \quad (10)$$

となることが、予想される。しかし厳密な計画結果によれば長波長側で

$$\phi \propto \lambda^{0.425} \quad (11)$$

となる。この違いは⑩式では、長波長ではより長い弧を観測している効果を見逃しているためにおきているのである。

(2) 偏光性

偏向部からの放射を、電子の軌道面内で観測すると、電場ベクトルの向きは水平面内にあるから、完全な直線偏光となる。このことはよく知られている。ところで、この放射光を軌道面より少し上から見たり下から見たりとすると、どのように見えるであろうか。電子の軌道は、楕円のように見えるから、一般には楕円偏光になることが予想されるが、実際に観測して見ると、上から観測したときと下から観測したときでは、互いに回転方向が

反対の楕円偏光となっている。そしてこの楕円偏光は、軌道面と観測方向とのなす角が γ^{-1} に比べてはるかに大きいとき、完全な円偏光に近づいていく。このとき、当然のことながら、強度は小さくなる。以上のことは定性的には理解できるであろう。

さて、このような偏向電磁石からの放射を、 γ^{-1} より十分に大きい角度で、上下等しくとりこみ、これを何らかの光学素子によって収束させたとき、収束点での偏光状態はどうなっているだろうか。一見すると、等しい角度でとりこむのだから、上下の互いに逆回りの楕円偏光が打消し合って、やっぱり水平方向の直線偏光になるのだという考え方があるかも知れない。なるほど、偏向部からの放射を上から見て右円偏光だとすると、下からは左円偏光に見える。したがって、両者を重ね合わせれば直線偏光になるという考え方である。しかし、実は、このような考え方は完全に誤っている。前号で述べたように、これらの光の干渉性はどの程度のものであるかをチェックせねばならない。そもそも、偏向部からの放射が円偏光らしく見えるためには、軌道面からかなりはずれた角度で観測せねばならず、その角度は γ^{-1} より大きい。一方、回折限界に対応したエミッタンスを考慮すると、 γ^{-1} より大きく離れた部分は位相空間上ではX'軸方向に離れており、横方向の干渉性が存在していない。さらに、光学素子を用いた収束系は、位相空間内の分布の形を変えるけれども、その面積を変えたり、離れたものを重ねたりはしない¹⁾。以上のようなわけで、実際に光を観測すると、水平方向の直線偏光成分の他に、右まわりや左まわりの円偏光成分が非干渉的にまじってくるのである。この結果、この光は、水平偏光成分と自然偏光成分の和のように見えるであろう。

[2] アンジュレータからの放射

(1) 観測される波長

アンジュレータの場合、基本となる電子の軌道

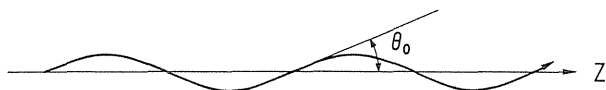


図2

がサイン関数的であるから、振動の一周期が何に対応するかと考えるときに、偏向電磁石のようなあいまいさがない。明らかに、アンジュレータ内の電子の運動の一周期は磁場の一周期の長さに対応している。この周期長は通常センチメートルのオーダーであるが、これを λ_u としよう。そこで、次に必要なのは、②式における δ を見積ることである。この見積りは以下のように行える。

アンジュレータ内の軌道として図2のようなサイン関数的なものを考える。この軌道のZ軸に対する傾きを θ とすると、その最大値を θ_0 として、

$$\theta = \theta_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda_u} \quad (12)$$

と書ける。この時、射影された速度 v は u よりもわずかに小さくなって

$$v = \cos \theta \cong u(1 - \theta^2/2)$$

となるが、これを一周にわたって平均化すると⑫式に注意し、

$$\begin{aligned} v &= u(1 - \langle \theta^2 \rangle / 2) \\ &= u(1 - \theta_0^2 / 4) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。さらに観測者が、Z軸に対してわずかに β だけ傾いた角度で観測したとすると、さらに $\cos \beta$ がかかることになり結局

$$\delta = u(1 - \theta_0^2 / 4 - \beta^2 / 2) \quad (14)$$

となる。これと②式を見比べると

$$\delta = \theta_0^2 / 4 + \beta^2 / 2 \quad (15)$$

となることがわかる。

ここで、 θ_0 を γ^{-1} との比で表すことにして、この比をKとおくと

$$K = \theta_0 \gamma \quad (16)$$

となり、結局

$$\delta = \frac{K^2}{4\gamma^2} + \frac{\beta^2}{2} \quad (17)$$

となるわけである。上で用いたパラメタKは通常、アンジュレータのK-値と呼ばれ重要なパラメタである。

③および⑪を参照すると、アンジュレータの波長は

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \beta^2 \right) \quad (18)$$

で与えられることがわかる。これは、アンジュレータの基本波を表す式であるが、実際には、アンジュレータは基本波の他に高調波を発生することが知られており、その次数をnとして

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \beta^2 \right) \quad (19)$$

という表現が、アンジュレータの波長公式とよばれている。

アンジュレータの波長公式は、また、仮想的な回折格子を考えることによっても導出でき、特にアンジュレータ光の波動光学的性質を論ずるには、そのほうが理解しやすい面もある。興味のある方は、参考文献2を参照されたい。

(2) アンジュレータ放射の角度広がり

アンジュレータ放射の角度広がり、偏向電磁石放射より小さいと言われている。定量的には、参考文献2のような方法で論ずることもできるが、ここでは、定性的に物理的直観で考えてみる。もし、角度広がりが、偏向部からの放射のように、回折限界の結果であるとする、角度広がりが小さいことは空間的広がりが大きいことを意味する。アンジュレータ放射は高輝度光源といわれているので、偏向部放射より空間的広がりが大きいというのは、一見奇妙な感じがするかもしれないが、実際にこれは正しい結論なのである。偏向部放射の空間的広がりが見かけ上、大きくみえるのは後述するうよに、別の理由によっている。

いま、図3のごとく、半径Rの偏向部放射で観測できる部分の長さsをR/γに等しいとしよう。これは光の回折限界を問題にする限り妥当な仮定である。この光源は、大ざっぱに言えば、角度広がりγ⁻¹と、空間広がり、sγ⁻¹=R/γ²を持っている。さて次に、このsの長さの2倍、すなわち2sを周期長とし、Nケの周期数を持つアンジュレータを考えてみよう。このアンジュレータの全長をLとすれば明らかに

$$L = 2Ns \tag{20}$$

である。ここで角度広がりを未知数としてφとおこう。そうすると空間的広がりは、Δx ~ 2Nsφのオーダーとなる。さらに、偏向部放射とアン

ジュレータ放射とで、同一の波長λを問題にしているとしよう。回折限界は波長によるから、等しい波長で比較するとわかりやすい。そうすると、偏向部放射の限界エミッタンスは

$$W_b \sim R/\gamma^3 \tag{21}$$

であり、これがアンジュレータ放射の限界エミッタンス

$$W_u \sim \phi \cdot 2Ns\phi = 2RN\phi^2/\gamma \tag{22}$$

に等しくなければならない。したがって、②①と②②と等しいとおくと

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2N}\gamma} \tag{23}$$

となる。すなわち、アンジュレータ放射の角度広がりは、γ⁻¹に比べて1/√(2N)のファクターだけ小さくなっている。これに対応して、空間的広がりは√(2N)倍だけ大きくなっているはずである。これは、②①および②③を用いてΔx (~Lφ)を計算してみれば容易に確かめられる。

以上の結果は、一見、経験に反するように見える。通常、偏向部放射は、水平方向には、かなり広がって見えるからである。しかしこれは、偏向部が通常、長い円弧であるために起きる現象で

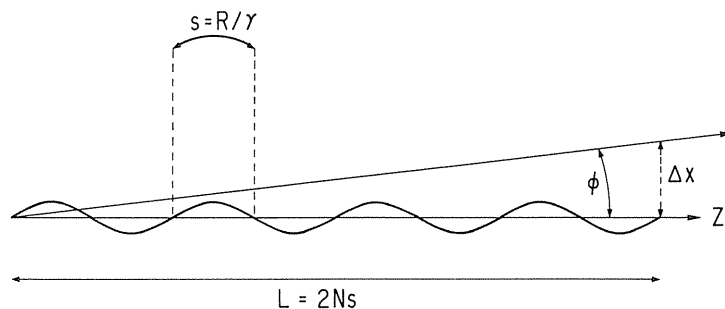


図3

あって、 R/γ よりも弧の長さをはるかに長い結果としておきているのである。この場合、それぞれの微小な弧 $s \sim R/\gamma$ からの放射を独立に（すなわち非干渉的な光として）観測しているから大きく見えるのである。これに対し、アンジュレータ放射は長さ L の光源が全体として一つの干渉的光源として動作することに特徴があるので、回折を問題にする限り、②の結果は正しいのである。

ところで、②式を見ると、アンジュレータ光の輝度がいかにして大きくなるかわかる。すなわち、 N 期の周期によって放射角は、一次元的には $1/\sqrt{2N}$ になるから立体角としては、 $1/(2N)$ まで小さいところに光を押し込めたことになる。これは輝度でいえば、 $2N$ 倍になったことに相当する。さらに偏向部放射とくらべると、極数が $2N$ 倍になっている。これらの効果をすべて考慮すると、 N 期の周期によって $4N^2$ 倍輝度あがるというわけである。もちろん、以上の結果は電子ビームがよく収束されていて、かつ平行である（エミッタンスが小さい）場合の極限の話である。1ヶ1ヶの電子軌道にバラツキがあって、そのエミッタンスが、光の回折限界エミッタンスより大きい場合、輝度は低下してくることになる。高輝度を実際のリングで実現するには、電子ビームそのものも低エミッタンスでなければならないのである。

(3) 二つのアンジュレータについての思考実験

放射光の干渉性を考える例題として、二つの同等なアンジュレータを、十分に離して、直列にならべた例を考えよう。一つのアンジュレータのみの時の角度分布が図4のようになっているとしたとき、二つ直列にしたときはどのような角度分布になるだろうかというのが設問である。しかし、この答えは明らかに観測の仕方によっているので、条件として十分高い分解能の分光器で単色化して観測するということをつけ加えよう。

以上の例題にたいする答えは、図5のように、角度分布に微細な構造が加わるというのが正解で

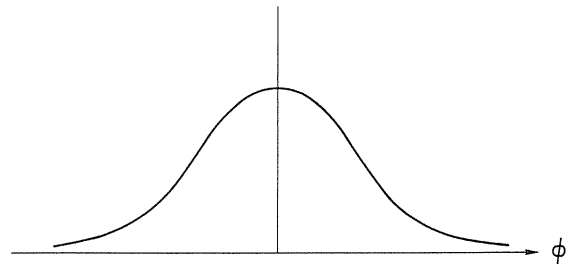


図4

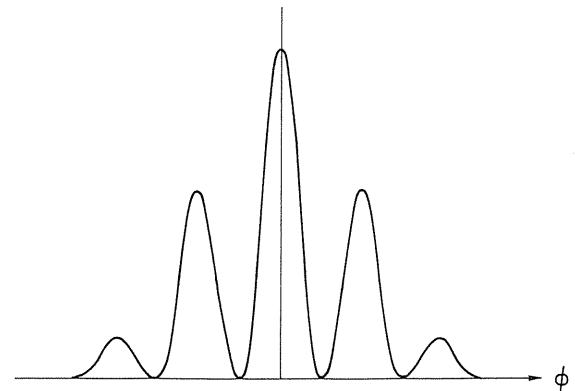


図5

ある。この理由は読者の皆様に考えて頂きたい。ヒントとして、十分高い分光器で単色化すると、波束の長さが長くなる、という点を指摘しておく。

参考文献

- 1) G.K.Green, BNL report, BNL50522(1976)
- 2) T.Miyahara, Jpn.J.Appl.Phys., Vol.25, No.11 (1986) 1672

